

## РЕЗОНАНС ПО МАНДЕЛЬШТАМУ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

Н. Д. Бирюк<sup>1</sup>, О. С. Хорпяков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> — Воронежский государственный университет,

<sup>2</sup> — Международный институт компьютерных технологий

Поступила в редакцию 14.04.2015 г.

**Аннотация.** Резонанс — ключевое явление колебательных электрических и радиосистем. Простейшей нетривиальной системой такого типа является колебательный контур. Резонанс обычного контура хорошо изучен, чего нельзя сказать о параметрическом или нелинейном контуре. Эти два типа контуров связаны между собой через *принцип линейного включения*, более простой из них — параметрический контур. Оказывается, что теорию резонанса обычного контура не удастся обобщить на параметрический контур. Для обобщения требуется привычное толкование обычного резонанса несколько изменить. Идея такого изменения впервые предложил академик Л. И. Мандельштам. Ниже, для краткости, такой резонанс назван резонансом по Мандельштаму. Цель настоящей публикации — сравнить резонанс по Мандельштаму с обычным резонансом и показать, как резонанс по Мандельштаму обобщается на параметрический контур.

**Ключевые слова:** обычный контур, параметрический контур, обычный резонанс, резонанс по Мандельштаму, обобщение, принцип линейного включения.

## RESONANCE MANDELSTAM PARAMETRIC CONTOUR

N. D. Birjuk, O. S. Khorpyakov

**Abstract.** A resonance is key phenomenon of oscillating electrical and radio systems. A simple nontrivial system of this type is oscillating circuit. Resonance of circuit with stable, parameter is close studied but of circuit with stable, parameter is close studied but there is time varying or nonlinear circuit wrong here. This two types of circuits are bound up with each other by means of principle of linear insertion, time varying circuit is more simple of them. It is found that well-known theory of ordinary circuit resonance can not generalize to time varying circuit. For this generalization it is demanded change of usual interpretation of resonance. Academician L.I. Mandelstam for the first time offers idea of this interpretation. Below such resonance is named resonance according to Mandelstam. This article has for an object to compare ordinary resonance with resonance according to Mandelstam and to give generalization resonance according to Mandelstam to time varying circuit.

**Keywords:** ordinary circuit, time varying circuit, ordinary resonance, resonance according to Mandelstam, generalization, principle of linear insertion.

Принцип линейного включения [1] с. 159 утверждает, что любое решение произвольного нелинейного уравнения может быть в точности получено в специально подобранном линейном уравнении. Подобно тому, как принцип суперпозиций охватывает все линейные уравнения, принцип линейного включения охватывает все нелинейные уравнения. Этот принцип повышает значимость параметрических систем для выяснения процессов, протекающих в нелинейных системах. Если представить себе, с одной стороны, все множество нелинейных

систем и все множество линейных параметрических систем, с другой, то любой процесс в первом множестве находится также и во втором множестве. Это следует из принципа линейного включения, который, к сожалению, не нашел должного применения в теории физических систем. Теория колебательного контура с постоянными параметрами широко известна, однако, она построена с целью практического применения и не приспособлена для обобщений. Поэтому здесь предложена другая теория резонанса обычного контура, удобная для обобщения на случай параметрического контура.

Рассмотрим процессы в контуре с постоянными параметрами, схема которого представлена на рис. 1.

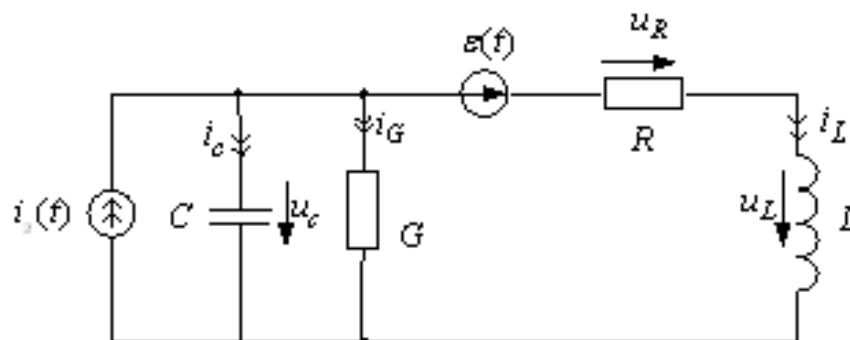


Рис. 1. Контур с постоянными параметрами

Из физических соображений получается, что тепловые потери нужно задавать отдельно для конденсатора с емкостью  $C$  и катушки индуктивности с индуктивностью  $L$ . Здесь они учтены введением активной проводимости  $G$  и активного сопротивления  $R$ . В отличие от общепринятого контура, здесь включены два внешних источника энергии – источник задающего тока  $i_3(t)$  и электродвижущая сила  $\varepsilon(t)$ . Так удобнее при рассмотрении резонанса параметрического контура. На рис.1 также показаны условные направления токов (двойные стрелки) и напряжений (обычные стрелки). Это необходимо для получения математической модели контура. Таких моделей может быть бесконечное множество в зависимости от того, какие две функции процесса выбраны в качестве определяющих. Такие функции могут иметь естественный характер, но могут быть и искусственно составленные. Вопрос заключается в том, чтобы выбрать наилучшую математическую модель контура.

В любом случае сначала по законам Кирхгофа составляется базовое уравнение

$$\left. \begin{aligned} i_c + i_G + i_L &= i_3(t) \\ -u_c + u_R + u_L &= \varepsilon(t) \end{aligned} \right\}$$

Математическая модель – важная составляющая анализа. Для иллюстрации этого ключевого вопроса составим две математические модели, из которых выберем лучшую. При составлении математических моделей будем считать, что все элементы контура изменяются во времени по любым непрерывным функциям, т.е.  $C = C(t)$ ,  $G = G(t)$ ,  $R = R(t)$ ,  $L = L(t)$ . Для наших целей нужна максимальная общность. В случае линейности требуется изменение элементов контура, *независимое от протекающих в них токов*. Для первой из них в качестве определяющих функций выберем заряд  $q(t)$  конденсатора и магнитное токосцепление  $\varphi(t)$  индуктивности, затем выразим все слагаемые левых частей базового уравнения через эти функции:

$$i_c = \frac{dq}{dt}, \quad i_G = Gu_c = \frac{G}{C}q, \quad i_L = \frac{1}{L}\varphi, \quad u_c = \frac{1}{C}q, \quad u_R = Ri_L = \frac{R}{L}\varphi, \quad u_L = \frac{d\varphi}{dt}$$

В теории электрических цепей принято закон электромагнитной индукции выражать не через э.д.с. индукции ( $\varepsilon_L = -\frac{d\varphi}{dt}$ ), а через напряжение индукции  $u_L = -\varepsilon_L$ . Если подставить эти выражения в базовое уравнение, то после преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{G}{C}q - \frac{1}{L}\varphi + i_3(t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\varphi + \varepsilon(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Это — первая математическая модель контура.

Для получения другой математической модели выбираем определяющие функции процесса: напряжение конденсатора  $u_c(t)$  и ток индуктивности  $i_L(t)$  — через которые выражаем слагаемые базового уравнения —

$$\begin{aligned} i_c &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_c) = C\frac{du_c}{dt} + \dot{C}u_c, \quad i_G = Gu_c, \quad u_R = Ri_L, \\ u_L &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li_L) = L\frac{di_L}{dt} + \dot{L}i_L \end{aligned}$$

Здесь точкой сверху над обозначением элементов обозначена производная по времени. Подставляя эти выражения в базовое уравнение, после преобразования получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= -\frac{G+\dot{C}}{C}u_c - \frac{1}{C}i_L + \frac{1}{C}i_3(t) \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L}u_c - \frac{R+\dot{L}}{L}i_L + \frac{1}{L}\varepsilon(t) \end{aligned} \right\}$$

Если перейти к контуру с постоянными элементами, то первая модель остается прежней, а вторая изменится (исчезнут  $\dot{C}$  и  $\dot{L}$ ). В этом заключается преимущество первой модели, которая здесь и выбрана для анализа. Сначала рассмотрим контур с постоянными параметрами.

Итак, выбираем дифференциальную систему (1), которую можно рассматривать также как одно векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} = \text{colon}(q, \varphi)$  — неизвестный вектор-столбец,  $\mathbf{f}(t) = \text{colon}[i_3(t), \varepsilon(t)]$  — свободный вектор-столбец,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad \text{— матрица системы.}$$

Элементы главной диагонали матрицы отрицательные — характерное свойство радиочепей с тепловыми потерями. При анализе контура нужно рассматривать: а) свободный процесс, б) вынужденный процесс.

**Свободный процесс.** Рассмотрим *однородную* дифференциальную систему контура

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{G}{C}q - \frac{1}{L}\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или  $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . (4)

Это — однородное векторное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянной матрицей.

Согласно теории дифференциальных уравнений, прежде чем решить систему (3)–(4), нужно найти корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{G}{C} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Раскрывая этот определитель, получим алгебраическое уравнение второй степени —

$$\lambda^2 + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)\lambda + \frac{1 + GR}{LC} = 0, \quad (5)$$

корни которого

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right)^2}, \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right)^2}, j = \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем типичные для теории радиочепей обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) - \text{коэффициент затухания,}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{собственная частота,}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(G\rho - \frac{R}{\rho}\right)} - \text{частота свободных колебаний,}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} - \text{характеристическое сопротивление контура.}$$

Собственная частота — частота свободных колебаний в отсутствии тепловых потерь, в нашем случае, при  $G = 0$ ,  $R = 0$ .

В новых обозначениях формулы (6) примут вид

$$\lambda_1 = -\alpha - j\omega_c, \quad \lambda_2 = -\alpha + j\omega_c. \quad (7)$$

Теперь можно представить общее решение дифференциальной системы (4) —

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathbf{c}_2 e^{\lambda_2 t} = (\mathbf{c}_1 e^{-j\omega_c t} + \mathbf{c}_2 e^{j\omega_c t}) e^{-\alpha t}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  — произвольные постоянные вектор-столбцы второго порядка, в общем случае, комплексные. Произвольно подбирая постоянные векторы  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  можно получить все решения (их — бесконечное множество) дифференциальной системы (4). Если имеется бесконечное множество решений, то их нужно упорядочить. Для упорядочения возьмем за основу следующие соображения:

- а) решение (8) выразим не через произвольные векторы, а через начальные условия;
- б) пара линейно независимых решений формирует фундаментальную матрицу решений, а через нее можно выразить любое решение.

Элементы фундаментальной матрицы решений представляют собой функции времени. При фиксированном времени это — постоянная матрица. Ограничим число фундаментальных матриц решений требованием, чтобы в начальный момент времени эта матрица была диагональной. Это равнозначно отысканию двух решений  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$  и  $\mathbf{x}^{(2)}(t)$  с начальными условиями при  $t = 0$

$$\mathbf{x}^{(1)}(p) = \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим первое решение. Из (8) видно, что начальное условие  $q(0) = q_0$ ,  $\varphi(0) = 0$  приводит к следующему решению:

$$\begin{aligned} q(t) &= \left[ \frac{q_m}{2} e^{-j(\omega_c t - \varphi)} + \frac{q_m}{2} e^{j(\omega_c t - \varphi)} \right] e^{-\alpha t} = q_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t - \varphi) \\ \varphi(t) &= \varphi_m e^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \quad q_m \cos \varphi = q_0. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом  $q_m$  и  $\varphi_m$  не являются взаимно независимыми и могут быть выражены через  $q_0$ . Если подставить (9) в дифференциальную систему (3), то после преобразования и группировки линейно независимых слагаемых можно получить

$$\varphi_m = \frac{1}{\omega_c C} q_0, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2\omega_0} \left( \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right) = \frac{1}{2} \left( G\rho - \frac{R}{\rho} \right), \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right)^2}}{\omega_0} = \frac{\omega_c}{\omega_0}. \quad (10)$$

Таким образом,

$$q_m = \frac{q_0}{\cos \varphi} = q_0 \frac{\omega_0}{\omega_c}$$

Итак, при начальных условиях  $q(0) = q_0$ ,  $\varphi(0) = 0$  решение дифференциальной системы (3) имеет вид

$$q(t) = q_0 \frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t - \varphi), \quad \varphi(t) = \frac{1}{\omega_c C} q_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_c t$$

или в векторном виде

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} q_0 \frac{\omega_0}{\omega_c} (\omega_c t - \varphi) \\ q_0 \frac{1}{\omega_c C} \sin \omega_c t \end{bmatrix} e^{-\alpha t}. \quad (11)$$

Найдем аналогичное решение  $x^{(2)}(t)$  при начальных условиях  $q(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Решение ищем в виде

$$q(t) = q_m e^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \quad \varphi(t) = \varphi_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t - \psi).$$

Подставляем эти соотношения в дифференциальную систему (3), после аналогичных предыдущему преобразований получим

$$q_m = -\frac{\varphi_0}{\omega_c L}, \quad \varphi_m = \varphi_0 \frac{\omega_0}{\omega_c}, \quad \psi = \varphi.$$

Интересующее нас решение имеет вид

$$x^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi_0}{\omega_c L} \sin \omega_c t \\ \varphi_0 \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \varphi) \end{bmatrix} e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

Итак, имеем два линейно независимые решения  $x^{(1)}(t)$ ,  $x^{(2)}(t)$ . Если их расположить рядом, то получим фундаментальную матрицу решений

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) & x^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \varphi) & -\frac{\varphi_0}{\omega_c L} \sin \omega_c t \\ \frac{q_0}{\omega_c C} \sin \omega_c t & \varphi_0 \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \varphi) \end{bmatrix} e^{-\alpha t}. \quad (13)$$

Эта фундаментальная матрица имеет такую особенность, что вырождается при  $t = 0$  в диагональную матрицу

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Таких матриц много меньше, чем в общем случае, но все же и их – бесконечное множество. Зададим элементам последней матрицы конкретные значения  $q_0 = 1$ ,  $\varphi_0 = 1$ . Это – условные обозначения. Размерности единицы заряда и магнитного потокосцепления выбираются в той системе единиц, в которой решается проблема. Если это система СИ, то кулон,  $\varphi_0 = 1$  вебер. В таком случае имеем  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – единичная матрица, а фундаментальная система решений (13) примет вид

$$\mathbf{X}_m(t) = \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \varphi) & -\frac{1}{\omega_c L} \sin \omega_c t \\ \frac{1}{\omega_c C} \sin \omega_c t & \frac{\omega_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t - \varphi) \end{bmatrix} e^{-\alpha t}. \quad (14)$$

Такая фундаментальная система решений единственная, ее принято называть *матрицантом* [2]. Зная матрицант, можно найти любое решение дифференциальной системы (3). Общее решение получается из матрицанта, если его умножить справа на постоянный вектор-столбец  $\mathbf{c} = colon(C_1, C_2)$  с произвольными действительными элементами  $C_1$  и  $C_2$ , т. е.

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_m(t)\mathbf{c}. \quad (15)$$

Подбирая должным образом элементы  $C_1$  и  $C_2$ , можно получить любое решение дифференциальной системы (3). Для контура с постоянными положительными элементами построение матрицанта особого значения не имеет, так как изначально известно, что такой контур асимптотически устойчив. Для параметрического контура построение матрицанта имеет ключевое значение, так как аналогичный параметрический контур может быть: а) асимптотически устойчив, б) не асимптотически устойчив, в) неустойчив. Обнаружить, к какому именно из этих вариантов относится конкретный параметрический контур, очень сложно. Для этого можно применить универсальный первый метод Ляпунова, а он начинается с построения матрицанта. Значительно более удобен для применения второй метод Ляпунова, но для этого нужно строить специальную функцию Ляпунова, способов построения которой в теории устойчивости Ляпунова не предложено. Кроме того, второй метод Ляпунова не обладает универсальностью первого метода. Он как бы выхватывает определенное подмножество параметрических контуров, оставляя остальные части множества вне рассмотрения. В данном случае контур с постоянными параметрами использован в качестве удобной модели для построения матрицанта. В случае параметрического контура принцип построения такой же, но связан с большой громоздкостью и малой физической прозрачностью.

**Обычный резонанс.** Для вынужденных колебаний в радиоцепях с постоянными параметрами ключевую роль играют гармонические (синусоидальные) функции времени источников энергии. Гармонические э.д.с. или задающие токи вызывают гармонические функции всех процессов в радиоцепях, причем их частоты равны частоте стимулирующей функции. При рассмотрении резонанса обычного контура целесообразно преобразовать дифференциальную систему первого порядка в дифференциальное уравнение второго порядка. При этом можно получить два таких уравнения, относительно заряда и потокосцепления —

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \frac{dq}{dt} + \frac{1+RG}{LC}q &= \frac{di_3}{dt} + \frac{R}{L}i_3 - \frac{\varepsilon}{L} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1+RG}{LC}\varphi &= \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{G}{C}\varepsilon + \frac{i_3}{C}. \end{aligned} \quad (16)$$

Как видно, левые части этих уравнений одинаковы. В правых частях неявно подразумеваются некоторые условности. Для составления дифференциальной системы (3) необходимо изначально выбрать условные направления токов и напряжений, один из вариантов которых показан на рис.1. Из схемы видно, что стимулирующие функции  $i_3$  и  $\varepsilon$  на заряд воздействуют в противоположных направлениях, а на потокосцепление — в одинаковых направлениях. Указанные на рис. 1 направления реализуются если источник тока превалирует над электродвижущей силой. Поэтому в первых двух слагаемых первого уравнения (16) поставлен знак плюс, а в третьем — минус. С равным успехом могло бы быть и наоборот. Знаки правых частей не влияют на резонансные частоты контура.

Будем считать стимулирующие функции источников энергии гармоническими с одинаковыми частотами —

$$\begin{aligned} i_3(t) &= I_{m3} \cos(\omega t + \varphi_I), \\ \varepsilon(t) &= E_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon), \\ \frac{di_3}{dt} &= -\omega I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_I) = \omega I_{m3} \cos\left(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\omega E_m \sin(\omega t + \varphi_\varepsilon) = \omega E_m \cos\left(\omega t + \varphi_\varepsilon + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Из того, что левые части уравнений (16) одинаковы может показаться, что резонансы частоты для заряда  $q$  и потокосцепления  $\varphi$  одинаковы. Это действительно так, но при соблюдении определенных условий. Если контур запитать э.д.с.  $\varepsilon (i_3 = 0)$  и при этом найти резонансную частоту заряда  $\omega_q$ , затем контур запитать источником тока  $i_3 (\varepsilon = 0)$  и найти резонансную частоту потокосцепления  $\omega_\varphi$ , то  $\omega_q = \omega_\varphi$ . Если контур запитывается э.д.с. и при этом найти обе резонансные частоты, то  $\omega_q < \omega_\varphi$ . Если контур запитывается источником тока, то  $\omega_q > \omega_\varphi$ . При определении резонансной частоты можно бесконечно медленно изменять частоту стимулирующей функции источника, оставляя амплитуду неизменной. Но эти условия не всегда выполняются. Пусть контур запитывается э.д.с.  $\varepsilon$ , тогда можно изменять ее частоту, оставляя постоянной амплитуду, при этих условиях определяется резонансная частота  $\omega_q$ . Но для потокосцепления  $\varphi$ , как видно из второго уравнения (16) это не получается, так как справа в слагаемом  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  частота влияет на амплитуду. Поэтому резонансная частота  $\omega_\varphi$  сдвигается по сравнению с  $\omega_q$  в сторону увеличения. Точно так же при запитке контура источником тока  $i_3$  резонансная частота заряда  $\omega_q$  сдвинется относительно  $\omega_\varphi$  в сторону увеличения.

Рассмотрим задачу количественно. Предположим  $i_3 = 0$ . Тогда первое уравнение в (16) примет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \frac{dq}{dt} + \frac{1 + RG}{LC}q = \frac{E_m}{L} \cos \omega t. \quad (18)$$

Знак при  $\varepsilon$  в (16) изменится на обратный (превалирующее значение тока  $i_3$  исчезает), начальной фазой  $\varphi_\varepsilon$  пренебрегаем, т. к. всегда можно выбрать соответствующее начало отсчета времени. Из теории дифференциальных уравнений следует, что вынужденное колебание заряда представляет собой гармоническую функцию с частотой правой части, т.е.

$$\begin{aligned} q(t) &= Q_m \cos(\omega t + \varphi_q), \\ \frac{dq}{dt} &= \omega Q_m \cos\left(\omega t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= \omega^2 Q_m \cos(\omega t + \varphi_q + \pi) = -\omega^2 Q_m \cos(\omega t + \varphi_q). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), получим

$$\left(\frac{1 + RG}{LC} - \omega^2\right) Q_m \cos(\omega t + \varphi_q) + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \omega Q_m \cos\left(\omega t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_m}{L} \cos \omega t.$$

При сложении любого числа гармонических функций с одинаковыми частотами получится одна гармоническая функция с такой же частотой. В нашем случае это приведет к выражению

$$\sqrt{\left(\frac{1 + RG}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)^2} \omega^2 Q_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t,$$

следовательно

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{E_m/L}{\left(\frac{1+RG}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)\omega^2}, \\ tg\varphi &= \frac{\left(\frac{1+RG}{LC} - \omega^2\right) \sin \varphi_q + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)\omega \cos \varphi_q}{\left(\frac{1+RG}{LC} - \omega^2\right) \cos \varphi_q - \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)\omega \sin \varphi_q} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

из последнего выражения находим

$$tg\varphi_q = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{G_p + \frac{R}{\rho}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - (1 + RG)}$$

Таким образом, получена амплитуда  $Q_m$  и начальная фаза  $\varphi_q$  заряда  $q$  как функции времени (19).

Для того, чтобы найти резонансную частоту заряда выделим частотно зависимую функцию в (20) и исследуем ее на экстремум

$$f(\omega) = \left(\frac{1+RG}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right)^2 \omega^2, \\ \frac{df(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что последнее равенство выполняется на частоте

$$\omega_q = \omega_0 \sqrt{1 + RG - \frac{1}{2} \left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right)^2} \quad (21)$$

На этой частоте функция  $f(\omega)$  достигаем минимума, а значит амплитуда  $Q_m$  — максимума. Для определения резонансной частоты  $\omega_\varphi$  потокосцепления используем первое уравнение (1) при условии  $i_3(t) \equiv 0$ , из которого получим

$$\varphi = -L \frac{dq}{dt} - \frac{LG}{C} q$$

Подставляя вместо  $q$  его выражение (19) и принимая во внимание (20), получим мгновенное значение потокосцепления  $\varphi$ . Исследуя это выражение на экстремум, получим формулу для резонансной частоты потокосцепления —

$$\omega_\varphi = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(1 + RG)^2 + \left[2(1 + RG) - \left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right)^2\right] G^2 \rho^2 + G^4 \rho^4 - G^2 \rho^2}} \quad (22)$$

Как и следовало ожидать, получилось  $\omega_\varphi > \omega_q$ .

Если этот же контур запитать не э.д.с.  $\varepsilon(t)$ , а источником тока  $i_3(t)$ , то получится обратное неравенство —  $\omega_\varphi < \omega_q$ .

Итак получается, что в резонанс настраивается не контур, как утверждается во всех руководствах, а определенный процесс в контуре. Имеем для заряда  $q(t)$  свою резонансную частоту  $\omega_q$ , которая справедлива также для напряжения емкости  $u_c = \frac{q}{C}$ ; для потокосцепления  $\varphi(t)$  резонансная частота  $\omega_\varphi$  другая, она справедлива также для тока индуктивности  $i_L = \frac{\varphi}{L}$ . Для тока емкости  $i_c = \frac{dq}{dt}$  и напряжения индуктивности  $u_L = \frac{d\varphi}{dt}$  резонансные частоты отличны от  $\omega_q$  и  $\omega_\varphi$  и могут быть найдены по предложенному выше образцу. Чем больше добротность контура, тем ближе друг к другу резонансные частоты протекающих в нем процессов. В электротехнике и радиотехнике на практике обычно применяют высокодобротные контуры. Поэтому в случае высокодобротных контуров можно говорить, что контур настроен в резонанс, хотя, как показано выше, это выражение нужно применять с осторожностью.

Как видно, теория обычного резонанса основана на положении математического анализа, конкретнее, на исследовании функции на экстремум. Такой резонанс можно назвать абстрактно математическим. Он широко применяется на практике; похоже, что всех устраивает, но, оказывается, что его нельзя обобщить на параметрические и нелинейные контуры. Причина заключается в том, что в вынужденных колебаниях обычного контура ключевую роль играют гармонические функции типа  $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $\omega$  — частота стимулирующей функции, а в свободных колебаниях — функция типа затухающей гармонической функции:  $f(t) = F_m e^{-\alpha t} \cos(\omega_c t + \varphi)$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания,  $\omega_c$  — частота свободного процесса. Это не выполняется для параметрического (а тем более, для нелинейного) контура. Например, для параметрического контура, в котором все элементы изменяются по периодическому закону с одной и той же круговой частотой  $\Omega$ , место гармонической функции занимает функция Хилла

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cos[(\omega + k\Omega)t + \varphi_k],$$



$\omega$  — частота стимулирующей функции, а вместо затухающей гармонической функции — затухающая функция Хилла

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k [(\omega_c + k\Omega)t + \varphi_k]$$

причем  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным,  $\omega_c$  — аналог частоты свободных колебаний, это частота задает спектр данной функции.

Если элементы контура изменяются не по периодическим законам, то все функции задаются в виде бесконечных степенных рядов. Переход от резонанса обычного контура к резонансу параметрического контура связан с большими осложнениями, поэтому прямое обобщение теории обычного резонанса на параметрический контур не получается.

**Резонанс по Мандельштаму.** В советской школе нелинейных колебаний, возглавляемой академиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в 30-ых годах прошлого века много внимания уделялось параметрическим радиоцепям. Особое внимание было уделено резонансу параметрического контура, а также был обнаружен тот факт, что обычный резонанс не обобщается на параметрический контур. Мандельштам в итоговой статье [3] предложил идею резонанса, подходящего для параметрического контура. Его ученик, профессор Г. С. Горелик в обширной статье, состоящей из 3-х публикаций [4] попытался на основе этой идеи разработать теорию резонанса параметрического контура. Им был рассмотрен частный случай параметрического контура и предложен первый вариант такой теории, который по неизвестным причинам не получил дальнейшего развития. Рабочая гипотеза Мандельштама заключалась в следующем: при резонансе в любой момент времени приходящая от источников в контур энергия полностью превращается в тепловые потери.

Сначала рассмотрим, как эту идею можно воплотить в обычном контуре. Для этого представим уравнение (1) в специальном виде —

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L}\varphi &= -\frac{G}{C}q + i_3(t) \\ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{C}q &= -\frac{R}{L}\varphi + \varepsilon(t) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Справа находятся стимулирующие функции  $i_3(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , а также диссипативные функции  $\frac{G}{C}q$  и  $\frac{R}{L}\varphi$ , ответственные за тепловые потери. По Мандельштаму в любой момент времени эти функции взаимно компенсируются, т.е. правые части равны нулю, а значит и левые части равны нулю, система (23) расщепляется на две системы —

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L}\varphi &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{C}q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} i_3(t) &= \frac{G}{C}q \\ \varepsilon(t) &= \frac{R}{L}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Первая система описывает собственные колебания контура. Ее нужно решить и найти  $q(t)$  и  $\varphi(t)$ . Вторая система дает выражение для стимулирующих функций источников. Если решена первая система, то эти функции находятся весьма просто. При таком резонансе частоты для заряда  $q(t)$  и магнитного потокосцепления  $\varphi(t)$  одинаковы и равны  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Этот резонанс отличается от обычного резонанса, но при больших добротностях контура различия незначительны и ими можно пренебречь.

**Резонанс параметрического контура.** Резонанс по Мандельштаму просто и естественно обобщается на параметрический контур, для которого вместо систем (24) и (25) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{L(t)}\varphi &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{C(t)}q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} i_3(t) &= \frac{G(t)}{C(t)}q \\ \varepsilon(t) &= \frac{R(t)}{L(t)}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Здесь тоже сначала нужно решить первую систему. Решение более сложное, чем для обычного контура. В результате функции  $q(t)$  и  $\varphi(t)$  не будут гармоническими, так что понятие “резонансная частота” теряет смысл. Если эти функции известны, то по формулам (27) однозначно находятся резонансные стимулирующие функции  $i_3(t)$  и  $\varepsilon(t)$ . Можно один из источников убрать. Тогда систему (23) нужно преобразовывать в одно дифференциальное уравнение второго порядка, затем представить его в специальном виде и расщепить на два уравнения, как это было сделано для системы (23). А дальше осуществляются преобразования по аналогии, т.е. решается уравнение собственных колебаний и находится резонансная стимулирующая функция.

**Выводы.** Резонанс параметрического контура — несравненно более сложное явление, чем резонанс обычного контура. Тем не менее, обычный контур является частным случаем параметрического. Поэтому резонанс обычного контура принципиально может быть обобщен на параметрический контур. Такая попытка реализована в данной статье, но для этого пришлось пересмотреть теорию обычного резонанса и изменить эту теорию, положив в основу рабочую гипотезу Мандельштама. Измененная теория обычного резонанса без труда обобщается на параметрический контур. Подобные вопросы рассматривались ранее в [5] и [6], но в настоящей статье применена более совершенная методика с использованием полезных аналогий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М. : Наука, 1966. — 585 с.
2. Якубович, В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М. : Наука, 1972. — 718 с.
3. Мандельштам, Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники / Л. И. Мандельштам // Успехи физических наук. — 1933. — Т. 13, вып. 3. — С. 161–194.
4. Горелик, Г. С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами / Г. С. Горелик // Журнал технической физики. — 1934. — Т. 4, вып. 10. — С. 1783–1817; 1935. — Т. 5, вып. 2. — С. 196–215; 1935. — Т. 5, вып. 3. — С. 490–517.
5. Бирюк, Н. Д. Резонанс первой степени параметрического контура / Н. Д. Бирюк // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2001. — № 1. — С. 5–10.
6. Белоглазов, В. В. Особые частоты колебательного контура / В. В. Белоглазов, Н. Д. Бирюк, Т. Н. Короткова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2009. — № 1. — С. 10–16.
7. Бирюк, Н. Д. Основа теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — 345 с.

## REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. The theory of Lyapunov exponents and its applications to issues sustainability. [Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. Teoriya pokazatelej Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustojchivosti]. Moscow, 1966, 585 p.
2. Yakubovich V.A., Starzhinsky V.M. Linear differential equations with periodic coefficients and their applications. [Yakubovich V.A., Starzhinskij V.M. Linejnye differencial'nye uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ix prilozheniya]. Moscow, 1972, 718 p.

3. Mandelstam L.I. Questions electrical vibrating systems and radio engineering. [Mandel'shtam L.I. Voprosy e'lektricheskix kolebatel'nyx sistem i radiotekhniki]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspеkhi*, 1933, vol. 13, iss. 3, pp. 161–194.

4. Gorelik G. S. Resonance phenomena in linear systems with periodically varying parameters. [Gorelik G. S. Rezonansnye yavleniya v linejnyx sistemax s periodicheski menyayushhimisya parametrami]. *Zhurnal texnicheskoj fiziki — Technical physics*, 1934, vol. 4, iss. 10, pp. 1783–1817; 1935, vol. 5, iss. 2, pp. 196–215; 1935, vol. 5, iss. 3, pp. 490–517.

5. Birjuk N.D. The resonance of the first degree parametric contour. [Biryuk N.D. Rezonans pervoj stepeni parametriceskogo kontura]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2001, no. 1, pp. 5–10.

6. Beloglazov V.V., Birjuk N.D., Korotkova T.N. Special frequency oscillating circuit. [Beloglazov V.V., Biryuk N.D., Korotkova T.N. Osobyе chastoty kolebatel'nogo kontura]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 1, pp. 10–16.

7. Birjuk N.D., Urgelas V.V. The basis of the theory of parametric radiotape. [Biryuk N.D., Yurgelas V.V. Osnova teorii parametriceskix radiocepej]. Voronezh, 2012, 345 p.

*Бирюк Николай Данилович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры экспериментальной физики физического факультета, Воронеж, Россия*  
E-mail: lidia@mail.ru  
Тел.: +7(473)220-86-25

*Birjuk N.D., Doctor of physical and mathematical sciences, professor of Physical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia*  
E-mail: lidia@mail.ru  
Tel.: +7(473)220-86-25

*Хорпьяков Олег Станиславович, кандидат тех. наук, доцент факультета информационных систем, Воронеж, Россия*  
E-mail: al17183@yandex.ru  
Тел.: +7(910)344-76-00

*Khorpyakov O.S., Associated Professor Faculty of Information Systems of International Institute of Computer Technologies, Voronezh, Russia*  
E-mail: al17183@yandex.ru  
Tel.: +7(910)344-76-00