

# Лазеры на свободных электронах

Н. А. Винокуров

## Введение

В этой статье описаны лазеры на свободных электронах. Эта область применения электронных пучков важна и интересна сама по себе. Однако для нас она является, главным образом, поводом для обсуждения ряда интересных физических явлений, позволяющих продемонстрировать работу общих законов электродинамики и специальной теории относительности. Поэтому в дальнейшем изложении будут встречаться многочисленные отступления об этих законах.

Лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) – это приборы, преобразующие энергию ультрарелятивистских электронов (т. е. электронов, энергия которых во много раз превышает их энергию покоя  $0,511 \text{ МэВ} = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ), в энергию электромагнитного излучения. Они позволяют получать монохроматическое излучение на любой длине волны в диапазоне от 0.1 нм до 1 мм, причем эта длина волны может относительно быстро перестраиваться на десятки процентов.

Для того, чтобы релятивистские электроны сильно (резонансно) взаимодействовали с электромагнитной волной, их траекторию, которая в пустом пространстве является прямой, делают слегка периодически искривленной – в виде спирали или волнистой линии. Магнитную систему, с магнитным полем, необходимым для создания такой траектории, называют ондулятором или вигглером. Если при прохождении одного периода траектории электрон отстает от электромагнитной волны ровно на одну длину волны (это условие называется условием синхронизма), то такая волна может эффективно замедлять электрон вдоль всей волнистой траектории. В этом случае поле излучения электрона будет складываться с полем начальной волны, усиливая последнюю (раз электрон замедляется, он теряет энергию, которая переходит в волну).

Принцип действия ЛСЭ состоит в следующем. Пусть электронный пучок и электромагнитная волна входят в ондулятор (см. Рис. 1). Если энергия электронов и длина волны таковы, что удовлетворяется условие синхронизма, то одна половина электронов начинает терять энергию, а другая, поступившая в ондулятор на половину периода волны позже – набирать. Таким образом, сначала средняя энергия электронов не меняется, но происходит модуляция энергии, т. е., пучок разбивается на слои толщиной в половину длины волны с чередующимся отклонением энергии от начальной. Однако частицы с меньшей энергией летят медленнее, а с большей – быстрее. Поэтому «быстрые» слои догоняют «медленные». Следовательно, возникают уплотнения и разрежения, т. е. модуляция плотности электронов с пространственным периодом, примерно равным длине волны. Далее повторяется то же, что было в первой половине ондулятора: одни «полуволновые» слои пучка замедляются, а другие – ускоряются, но теперь энергию теряют слои с большей плотностью частиц, а приобретают - слои с меньшей плотностью. В результате средняя энергия электронов уменьшается, а мощность электромагнитной волны растет.

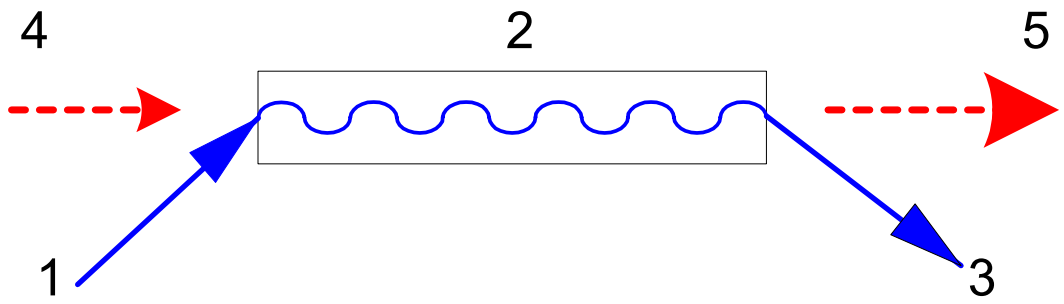


Рис. 1. Схема ЛСЭ-усилителя. 1 – входящий электронный пучок, 2 – ондулятор, 3 – обработанные электроны, 4 – входящая электромагнитная волна, 5 – усиленная волна.

Итак, ЛСЭ усиливают электромагнитное излучение. Если, как и во многих других лазерах, на оси системы слева и справа от ондулятора поставить два зеркала, то волна будет циркулировать между ними и, многократно проходя через ондулятор, каждый раз усиливаться. Конечно, рост интенсивности излучения ограничен. Одной из причин ограничения интенсивности (насыщения) может быть практически полная группировка электронов во второй половине ондулятора. В этом случае дальнейший рост мощности излучения на входе ЛСЭ приводит к уменьшению группировки (разгруппировке) и, следовательно, к снижению мощности, передаваемой пучком в излучение.

Чтобы понять содержание трех предыдущих абзацев нам придется вспомнить основы электродинамики и обсудить процессы, происходящие в ЛСЭ, с разных точек зрения.

## Закон Кулона и понятие электрического поля

Количественное описание электрических явлений началось с общеизвестного закона Кулона<sup>1</sup>, описывающего силу взаимного притяжения  $F$  между двумя малыми (по сравнению с расстоянием между ними  $R$ ) телами, несущими электрические заряды  $Q$  и  $q$  (см. Рис. 2):

$$F = \frac{qQ}{R^2}. \quad (1)$$

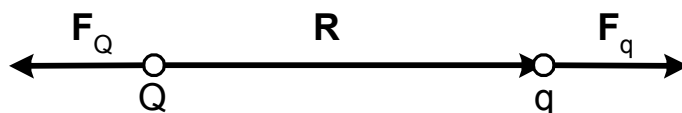


Рис. 2. Силы, действующие на заряды.

<sup>1</sup> История развития электродинамики очень интересна. Она подробно описана в классической монографии Э. Уиттекера «История теории эфира и электричества» (Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001). Более популярное изложение близких тем можно найти книге М. Борна «Эйнштейновская теория относительности» (М.: «Мир», 1964). Закону Кулона посвящена книга С. Р. Филоновича «Судьба классического закона» (Библиотечка «Квант», выпуск 79, М.: Наука, 1990).

К этой формуле необходимы некоторые комментарии. Понятие силы, а также связанные с ним понятия работы, энергии и импульса, лежат в основе физики. Поэтому не случайно, что этот закон описывает именно силу. Про силу известно, что она вектор, т. е., имеет величину и направление. Для читателей, знакомых с дифференциальной геометрией, заметим, что сила – это дифференциальная 1-форма, соответствующая работе (скаляру)  $\mathbf{F}d\mathbf{R}$  при малом перемещении  $d\mathbf{R}$ . Кроме того, сила аддитивна, т. е., если на тело действует несколько сил, то их действие эквивалентно действию одной силы, равной векторной сумме первичных сил. Основная характеристика электрических свойств малого тела – его электрический заряд. Из закона Кулона (1) и аддитивности силы следует, что заряд тоже аддитивен (заряд нескольких тел равен сумме зарядов тел). Векторная форма закона Кулона для силы, действующей на заряд  $q$ , имеет вид

$$\mathbf{F}_q = \frac{qQ}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}$  - радиус-вектор проведенный от заряда  $Q$  к заряду  $q$ , на который действует сила. Если зарядов не два, а  $N+1$ , то, предполагая справедливость формулы (2) в присутствии других зарядов<sup>2</sup>, в соответствии с аддитивностью силы, имеем

$$\mathbf{F}_q = q \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{R_n^3} \mathbf{R}_n. \quad (3)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  в месте расположения заряда  $q$  определяется как отношение силы, действующей на заряд, к величине последнего.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_q}{q} = \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{R_n^3} \mathbf{R}_n. \quad (4)$$

Существует ли электрическое поле как независимый физический объект, или это просто краткое обозначение суммы в формуле (3)? Для покоящихся зарядов достаточно задать их распределение в пространстве, и можно легко найти силы, действующие на заряды. Расчет вектора поля в точках, где нет зарядов представляется бессмысленным, т. к. для его измерения необходим заряд. Поэтому можно не вводить «лишнее» понятие поля, считая первичным распределение зарядов. Последнее утверждение – типичный пример применения философского принципа редукционизма, или «бритвы Оккама». В данном случае знаменитый принцип дал неправильный прогноз. Оказалось, что при движении зарядов поле отрывается от них, а, значит, становится независимым объектом. Оторвавшееся поле называют полем излучения. Мы подробнее обсудим электромагнитное излучение чуть позже.

Есть еще одна веская причина для использования векторного поля  $\mathbf{E}$ . Это сохранение его потока. Понятие потока пришло из рассмотрения течения жидкости. Объем жидкости  $dV$ , проходящий за единицу времени через малую площадку площадью  $dS$  (см. Рис. 3), может быть рассчитан по формуле  $dV = v dS \cos \theta = v d\mathbf{S}$ , где вектор  $d\mathbf{S}$  считается направленным перпендикулярно площадке, а  $\mathbf{v}$  скорость жидкости в данной точке, причем угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $d\mathbf{S}$  равен  $\theta$ . Поток через какую-либо поверхность  $S$  определяется, как сумма таких малых потоков  $\int_S v d\mathbf{S}$ . Вообще говоря, скорость жидкости является вектором другого типа, чем сила, т. к. ее интеграл вдоль пути не имеет физического и геометрического смысла. Скорость частицы направлена по касательной к ее траектории. Поэтому векторы, которые можно интегрировать по поверхности, называют касательными векторами. Для поля таких векторов (в каждой точке пространства задан свой вектор) можно определить кривые, касательные к которым в каждой точке параллельны вектору в этой точке (см. Рис. 3). Для жидкости такие кривые называются линиями тока. Для течения, постоянного во времени, они совпадают с траекториями частиц жидкости. Можно выбрать плотность таких линий

<sup>2</sup> Это предположение не выполняется, например, в среде с нелинейной поляризуемостью.

пропорциональной величине векторного поля. Тогда поток численно равен числу линий тока, проходящих через поверхность интегрирования.

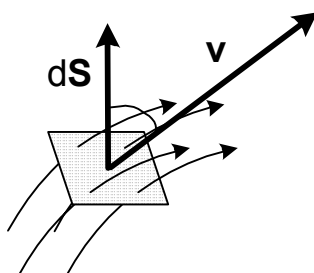


Рис. 3. Поток жидкости через малую площадку  $dS$ .

Так как вектор электрического поля, введенный в (4) через силу, которая является дифференциальной формой, тоже есть дифференциальная 1-форма, то непосредственно ввести его поток (образовать соответствующий скаляр  $\mathbf{E} dS$ ) нельзя. Поэтому вводится специальный касательный вектор  $\mathbf{D}$ , называемый электрическим смещением<sup>3</sup>. В пустом пространстве в декартовой прямоугольной системе координат в гауссовой системе единиц измерения (СГС) компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  численно равны. В системе единиц СИ разница между напряженностью  $\mathbf{E}$  и смещением  $\mathbf{D}$  электрического поля подчеркивается выбором разных единиц для их измерения<sup>4</sup>. Однако, для упрощения формул далее мы будем писать  $\mathbf{E}$  вместо  $\mathbf{D}$ . Поток и силовые линии электрического поля показаны на Рис. 4.

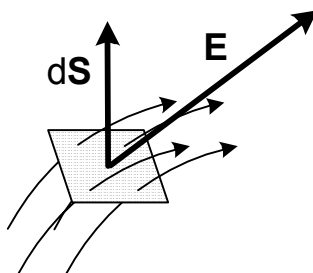


Рис. 4. Поток вектора  $\mathbf{E}$  через малую площадку  $dS$  равен числу силовых линий, проходящих через площадку.

Из формулы (4) легко выводится<sup>5</sup> электростатическая теорема Гаусса: интеграл от поля по поверхности, ограничивающей произвольную область пространства, равен суммарному заряду  $Q$ , находящемуся внутри области, умноженному на  $4\pi$ ,

<sup>3</sup> Термин «смещение» (по английски – “displacement”, откуда и появилось обозначение  $\mathbf{D}$ ) пришел из теорий эфира – несуществующей по современным представлениям среды, заполняющей все пространство. Если в такой среде происходит смещение ее зарядов от их равновесного положения (т. н. поляризация среды), то появляется электрическое поле, связанное с тем, что вклады положительных и отрицательных зарядов теперь не компенсируют друг друга. В веществе электрическое поле действительно вызывает поляризацию, и для его описания используются два разных вектора -  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ .

<sup>4</sup> Разница в физическом смысле  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  и преимущества системы СИ обсуждаются, например, в начале учебника А. Зоммерфельда «Электродинамика».

<sup>5</sup> Используется очевидное равенство  $\int_S \frac{\mathbf{R}}{R^3} dS = 4\pi$ , если замкнутая поверхность  $S$  охватывает начало

координат, из которого проведен радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , либо  $\int_S \frac{\mathbf{R}}{R^3} dS = 0$ , если поверхность  $S$  не охватывает

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q. \quad (5)$$

Итак, в каждой точке пространства имеется свой вектор электрического поля. Тогда через каждую точку можно провести кривую, в каждой точке которой вектор поля параллелен касательной к этой кривой. Такие линии называются силовыми линиями поля. Если плотность силовых линий в окрестности каждой точки пространства выбрать пропорциональной величине поля, то, в соответствии с теоремой Гаусса (5), силовые линии будут начинаться и кончаться только на электрических зарядах. В частности, для одного точечного заряда силовые линии представляют собой лучи, выходящие из заряда (см. Рис. 5), причем плотность лучей не зависит от направления.

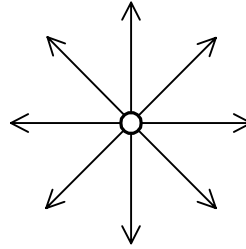


Рис. 5. Силовые линии уединенного заряда.

Раз мы считаем, что электрическое поле является самостоятельным физическим объектом, то можно попытаться найти плотность энергии электрического поля. Это можно сделать при помощи простого рассуждения. Поместим заряд  $Q$  в центр сферической полости радиуса  $R$  в проводящем материале (например, каком-нибудь металле), как это показано на Рис. 6. Электрическое поле не проникает в проводник, т. к. электроны внутри проводника подвижны и собираются на поверхности проводника, гася поле внутри. Тогда плотность заряда на поверхности сферы равна  $\sigma = -Q/(4\pi R^2) = -E/4\pi$ , а сила, действующая на площадку  $dS$  -  $E\sigma dS/2 = -E^2 dS/(8\pi)$ . Множитель  $1/2$  в последней формуле появился из-за того, что формально электрическое поле испытывает скачок на поверхности проводника, и на поверхностный заряд действует среднее поле, равное половине поверхностного. Сила направлена внутрь полости. При увеличении радиуса сферы на  $\Delta R$  внешние силы должны совершить работу  $E^2 R^2 \Delta R/2 = \Delta V E^2/8\pi$ . Так как внутри сферы радиуса  $R$  поле осталось неизменным, то вся работа была затрачена на появление поля внутри приращению объема  $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ . Следовательно, плотность энергии электрического поля есть  $E^2/8\pi$ .

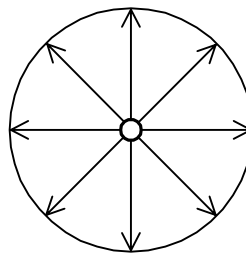


Рис. 6. Заряд в центре сферической полости в проводнике.

---

начало координат. Геометрический смысл этого равенства состоит в том, что полный телесный угол равен  $4\pi$ .

## Излучение – следствие конечной скорости распространения возмущения и подтверждение реальности поля

Наиболее известный процесс излучения – это кольцевые волны, расходящиеся на поверхности воды от места падения камня. Здесь сразу видны многие характерные особенности волновых процессов. Во-первых, это конечная скорость распространения волн, с которой связано запаздывание влияния источника волн на удаленный участок поверхности воды. Во-вторых, невооруженным глазом видно, что волны переносят энергию – там, где поверхность воды приподнимается, потенциальная энергия воды, приподнятой над средним уровнем, повышена. Посмотрев на движение некоторого малого участка поверхности, мы заметим, что он колеблется. При этом энергия частиц воды периодически переходит из потенциальной в кинетическую и обратно.

Для электромагнитных волн картина несколько сложнее. Рассмотрим заряд, движущийся вдоль оси  $x$  (Рис. 7)<sup>6</sup>.

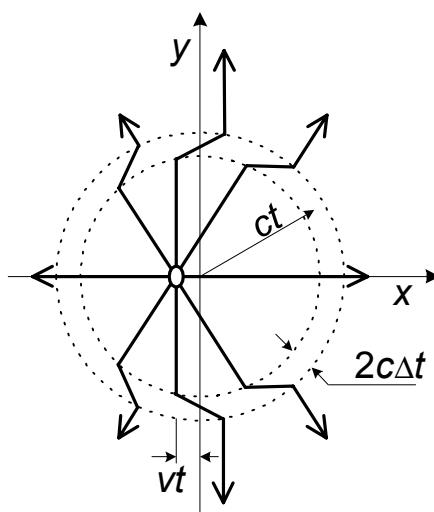


Рис. 7. Силовые линии электрического поля при  $t > 0$ .

Пусть сначала он движется в положительном направлении со скоростью  $v$ . В момент времени  $-\Delta t$  заряд начинает тормозить с постоянным ускорением  $-v/\Delta t$ . При  $t = 0$  он останавливается в точке  $x = 0$ . Затем при том же ускорении заряд идет обратно, а при  $t > \Delta t$  продолжает движение с постоянной скоростью  $-v$ , удаляясь от начала координат вдоль отрицательной полуоси. Изменение поля распространяется с конечной скоростью – скоростью света  $c$ . Для упрощения рассмотрения будем считать движение заряда нерелятивистским, т. е.  $v \ll c$ . Тогда при  $t \gg \Delta t$  вне сферы радиуса  $c(t+\Delta t)$  поле будет совпадать с полем заряда, продолжающего равномерное движение со скоростью  $v$ . Аналогично, внутри сферы радиуса  $c(t-\Delta t)$  поле будет совпадать с полем заряда, равномерно движущегося со скоростью  $-v$ . В тонком сферическом слое толщиной  $2c\Delta t$  наружные силовые линии соединяются с внутренними. Из-за неразрывности силовых линий каждая наружная линия соединяется с вполне определенной внутренней линией<sup>7</sup>. Например, силовые линии, параллельные оси  $y$  вне вышеупомянутого сферического слоя, соединяются между собой. Тогда вблизи оси  $y$  силовые линии уплотняются внутри сферического слоя в  $\sqrt{1 + \left(\frac{vt}{c\Delta t}\right)^2}$  раз (см. Рис. 8).

<sup>6</sup> Изложенное ниже объяснение механизма дипольного излучения принадлежит Дж. Дж. Томсону, см., например, книгу Ч. Мизнера, К. Торна, и Дж. Уилера «Гравитация».

<sup>7</sup> Если бы силовые линии были материальны, мы могли бы сказать, что они ведут себя, как натянутые нити, обладающие некоторой массой и отталкивающиеся друг от друга.

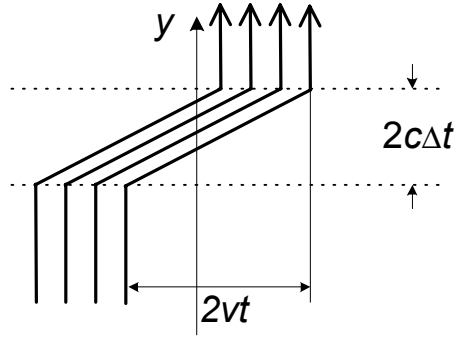


Рис. 8. Силовые линии электрического поля вблизи оси  $y$  (увеличенный фрагмент предыдущего рисунка).

Таким образом, при достаточно больших временах  $t$  (т. е., на достаточно больших расстояниях от начала координат  $R = ct$ ) поле в расширяющемся сферическом слое толщиной  $2c\Delta t$  становится почти поперечным (т. е., почти перпендикулярным к направлению распространения волны – оси  $y$ ). Величина поля превышает величину поля

вне слоя в  $\sqrt{1 + \left(\frac{vt}{c\Delta t}\right)^2} \approx \frac{vt}{c\Delta t} = \frac{aR}{c^2}$  раз, где  $a = v/\Delta t$  – ускорение заряда. Учитывая, что для

медленного ( $v \ll c$ ) равномерно движущегося заряда можно использовать формулу для электростатического поля (4)  $E_y = Q/R^2$ , получаем выражение для поперечной составляющей поля излучения на оси  $y$

$$E_x(t) = Q \frac{a(t - R/c)}{c^2 R}, \quad (6)$$

где ускорение  $a(t - R/c)$  берется в более ранний, чем  $t$ , момент времени  $t - R/c$ . Зависимость поля от аргумента  $t - R/c$  демонстрирует типичную черту волновых процессов: возмущение поля в различные моменты времени  $t$  имеет разные положения  $y = R = ct$ , т. е., «бежит» вдоль оси  $y$  со скоростью света  $c$ . Отметим, что поперечная компонента поля  $E_x$ , описываемая формулой (6), спадает с ростом расстояния  $R$  как  $1/R$ , т. е., гораздо медленнее, чем продольная  $E_y$ , пропорциональная  $1/R^2$ . Это значит, что на достаточно больших расстояниях поле становится чисто поперечным и описывается затухающей бегущей волной, уходящей от источника.

Поле в точках, не лежащих на оси  $y$ , находится при помощи аналогичных рассуждений. При этом расстояние между входом силовой линии в сферический слой, который мы теперь можем называть волновым, и выходом из него будет не  $2vt$ , как на Рис. 5, а  $2vt \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между ускорением заряда, направленным в отрицательном направлении оси  $x$ , и радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , проведенным из начала координат в точку наблюдения. Синус угла между двумя векторами ( $\mathbf{R}$  и ускорением  $\mathbf{a}$ ) может быть выражен через их векторное произведение  $\mathbf{R} \times \mathbf{a}$ . Последний вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат ускорение и радиус-вектор (плоскости рисунка на Рис. 7), а электрическое поле лежит в этой плоскости. Повернуть вектор на девяносто градусов вокруг оси  $\mathbf{R}$  можно при помощи еще одной операции векторного произведения<sup>8</sup>:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \frac{Q}{c^2 R} [\mathbf{a}(t - R/c) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$  – единичный вектор.  $\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\mathbf{a} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) = -\mathbf{a}_\perp$ , т. е., двойное векторное произведение в формуле (7) есть просто составляющая ускорения, перпендикулярная  $\mathbf{R}$ ,

<sup>8</sup> Почему синус угла и поворот вектора на девяносто градусов выражаются через векторное произведение и только через него? Потому, что в окончательных формулах должны фигурировать только векторы, а не их компоненты. Последнее условие есть следствие изотропности пространства.

взятая с обратным знаком. В соответствии с Рис. 7 мы можем изобразить векторы, фигурирующие в нашей задаче, как это показано на Рис. 8.

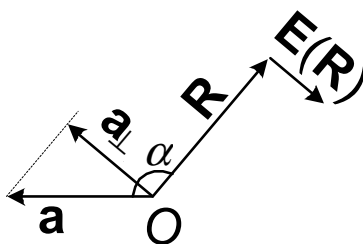


Рис. 8. Векторы, входящие в формулу для дипольного излучения.

Отметим, что рассматриваемая нами медленно (как  $1/R$ ) спадающая часть поля, поперечна, т. е. перпендикулярна направлению  $\mathbf{n}$  от источника в точку наблюдения, которое можно назвать направлением распространения волны. Эту часть поля, зависящую от  $t-R/c$ , т. е., расходящуюся от источника, называют полем излучения.

Вообще, часто поле излучения определяют, как ту часть поля системы, расположенной в пустом изотропном пространстве вблизи начала координат, которая на больших (по сравнению с размерами системы) расстояниях спадает как  $1/R$  (конечно, при фиксированном  $t-R/c$ ). Такое определение поля излучения справедливо не только для электромагнитных волн, но и для гравитационных, звуковых и других волн в трехмерном пространстве. Это связано с законом сохранения энергии. Действительно, интенсивность излучения (мощность, проходящая через площадку единичной площади, нормаль к которой направлена в направлении распространения волны) пропорциональна квадрату величины поля<sup>9</sup>. Тогда интенсивность спадает, как  $1/R^2$ , а полная мощность, уходящая от источника в малый телесный угол  $\Delta\Omega$ , получаемая умножением интенсивности на площадь  $R^2\Delta\Omega$ , не зависит от  $R$ . Таким образом энергия, излученная в некоторый телесный угол, сохраняется. Для цилиндрических и плоских волн и волн в пространствах с размерностью, отличной от трех, зависимость амплитуды волны от расстояния другая. Амплитуда волн в «двумерном пространстве» (например, на поверхности воды) спадает, как  $1/\sqrt{R}$ , а для одномерных волн – постоянна (если нет потерь энергии).

В электродинамике для описания поля вдали от системы зарядов используют понятие электрического дипольного момента, который для  $N$  зарядов определяется по формуле  $\mathbf{d} = \sum_{n=1}^N Q_n \mathbf{R}_n$ . Тогда поле излучения (7) можно выразить через вторую производную дипольного момента по времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mathbf{d}(t - R/c) \times \mathbf{n}}{c^2 R} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{c^2 R} \mathbf{d}_{\perp}(t - R/c). \quad (8)$$

Поэтому излучение медленно ( $v \ll c$ ) движущихся зарядов, описываемое формулами (7) или (8), называют дипольным излучением. В соответствии с определением электрического поля через силу (4) поля излучения от разных зарядов можно векторно складывать. Значит, формула дипольного излучения (8) справедлива не только для одного заряда, но и для системы зарядов. Примером такой системы является антенна радиопередатчика.

Обратим внимание на вектор  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ , описываемый дробью в формуле (8). Именно его мы поворачивали на девяносто градусов при выводе выражения для электрического поля излучения (7). Вектор  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  по абсолютной величине равен вектору электрического поля  $\mathbf{E}$  и перпендикулярен как направлению распространения волны  $\mathbf{n}$ , так и электрическому полю. Его силовые линии очень просты – это окружности вокруг оси  $x$ . Этот вектор называется напряженностью магнитного поля.

<sup>9</sup> Для электрического поля из его определения через силу (4) можно получить выражение для интенсивности  $I = cE^2/(4\pi)$ .

Интересное обобщение формулы (7) для поля излучения заряда приведено в Фейнмановских лекциях по физике<sup>10</sup>. Если ввести единичный вектор  $\mathbf{e} = -\mathbf{n}$ , направленный из точки  $\mathbf{R}$ , где измеряется электрическое поле излучения, в точку, где находится излучающий заряд, то  $\mathbf{a}_\perp/R = d^2\mathbf{e}/dt^2$  и поле излучения принимает исключительно простой вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = -\frac{Q}{c^2} \frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} \quad (9)$$

Замечательно то, что эта формула справедлива не только для медленно движущихся зарядов, как формула дипольного излучения (7), но и для релятивистских заряженных частиц. Впрочем, простота формулы (9) обманчива – вектор  $\mathbf{e}$  нужно брать не в момент времени  $t$ , а в более ранний момент  $t'$ , когда было испущено излучение. Другими словами, единичный вектор  $\mathbf{e}$  направлен на положение заряда «видимое» в точке наблюдения в момент  $t$ . Момент  $t'$  находится из уравнения

$$c(t - t') = |\mathbf{R}_Q(t') - \mathbf{R}|, \quad (10)$$

где  $\mathbf{R}_Q(t')$  – радиус-вектор излучающего заряда, так что  $\mathbf{e} = (\mathbf{R}_Q(t') - \mathbf{R}) / |\mathbf{R}_Q(t') - \mathbf{R}|$ . Для упрощения обозначений можно поместить начало координат не вблизи источника излучения, а в точке измерения поля, т. е. положить  $\mathbf{R} = 0$ , как это показано на Рис. 9.

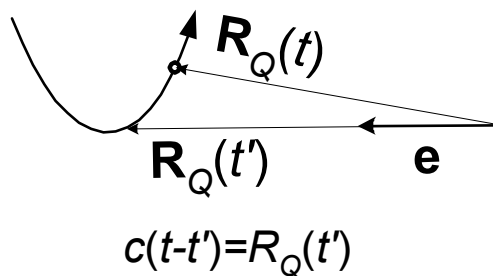


Рис. 9. Векторы, входящие в формулу для излучения заряда.

## Синхротронное излучение

Простейший пример излучения – это излучение заряда, равномерно вращающегося вдоль окружности радиуса  $r$  с угловой частотой  $\omega$  (при этом скорость частицы  $v = \omega r$ ).<sup>11</sup> Геометрия задачи показана на Рис. 10.

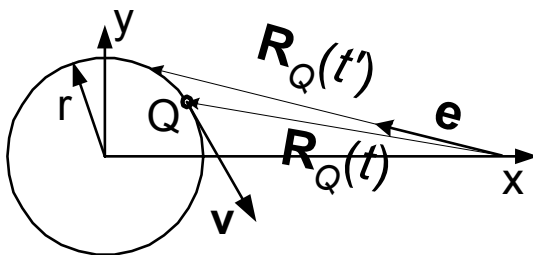


Рис. 10. Заряд равномерно движется вдоль окружности.

<sup>10</sup> Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс «Фейнмановские лекции по физике». М. «Мир», 1977.

<sup>11</sup> Термин «синхротронное излучение» связан с тем, что такое излучение наблюдается при движении электронов в синхротронах – циклических ускорителях заряженных частиц.

В этом случае  $e_y(t) \approx y(t)/R = r \cos(\omega t)/R$ . При медленном ( $v \ll c$ ) вращении запаздыванием за время излучения можно пренебречь, т. е. считать, что  $t = t'$ . Тогда из формулы (9) получаем

$$E_y(R, 0, 0, t) = \frac{Q\omega^2 r \cos[\omega(t - R/c)]}{c^2 R}. \quad (11)$$

Отметим, что это поле получается и из более простой формулы для дипольного излучения (8), причем в числителе дроби (11) стоит вторая производная проекции дипольного момента на ось  $y$ .

При более быстром вращении следует провести дифференцирование видимого положения заряда более точно:

$$E_y(R, 0, 0, t) = -\frac{Q}{c^2 R} \frac{d^2 y(t')}{dt'^2} = -\frac{Q}{c^2 R} \left[ \frac{d^2 y(t')}{dt'^2} \left( \frac{dt'}{dt} \right)^2 + \frac{dy(t')}{dt'} \frac{d^2 t'}{dt^2} \right]. \quad (12)$$

Согласно общему выражению для запаздывания (10)

$$c(t - t') = \sqrt{y^2(t') + (R - x(t'))^2} \approx R - x(t').$$

Производная

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{dx(t')}{dt'} = 1 - \frac{v}{c} \cos(\omega t')$$

характеризует видимую неравномерность вращения. Наблюдатель «видит», что заряд движется в  $1/(1 - v/c)$  раз быстрее вблизи точки ( $y = r, x = 0$ ) в верхней части окружности. Причину такого видимого убыстрения движения просто понять. Рассмотрим прохождение зарядом малого участка верхней части окружности (Рис. 11). Пусть в точках  $A$  и  $B$ , разделенных длиной  $ds$ , заряд испускает сигналы. Испускание сигнала из  $B$  происходит на  $dt' = ds/v$  позже. Так как точка  $A$  находится от наблюдателя на  $ds$  дальше, чем  $B$ , то задержка прихода сигнала из  $A$  относительно сигнала из  $B$  равна  $dt = dt' - ds/c = dt'(1 - v/c)$ .

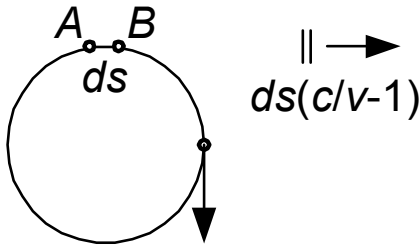


Рис. 11. «Моментальная фотография». Сигналы, испущенные зарядом при прохождении точек  $A$  и  $B$ , показаны в виде двух вертикальных отрезков справа. Задержка между приходом сигналов меньше задержки между актами их испускания.

Таким образом, наблюдатель видит движение заряда, «сжатое во времени» в  $1/(1 - v/c)$  раз. Это явление, связанное с конечностью скорости распространения сигнала (волны), называется эффектом Доплера. Так как скорость звука в воздухе в миллион раз меньше скорости света, то эффект Доплера проявляется для звука при гораздо меньших скоростях. Например, частота гудка приближающегося поезда выше, чем у покоящегося и удаляющегося.

Согласно формуле (12) поле излучения усиливается в  $(dt'/dt)^2 = 1/(1-v/c)^2$  раз<sup>12</sup>. После выполнения всех дифференцирований в (12) получим явную формулу для поля синхротронного излучения

$$E_y(R,0,0,t) = \frac{Qr\omega^2}{c^2 R} \left[ \frac{\cos(\omega t')}{\left[1 - \frac{v}{c} \cos(\omega t')\right]^2} + \frac{\frac{v}{c} \sin^2(\omega t')}{\left[1 - \frac{v}{c} \cos(\omega t')\right]^3} \right]. \quad (13)$$

При малых скоростях это выражение совпадает с дипольным излучением из формул (6 – 8). При скорости, близкой к скорости света, поле велико только вблизи  $\omega t' = 2\pi n$ , т. е. представляет собой последовательность коротких импульсов

$$E_y(R,0,0,t) \approx \frac{Qv^2}{c^2 r R \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2} \frac{1 - 2\frac{v}{c-v}(\omega t')^2}{\left[1 - \frac{v}{c-v} \frac{(\omega t')^2}{2}\right]^3}. \quad (14)$$

Из последней формулы видно, что длительность этих импульсов порядка

$$\Delta t = \frac{dt}{dt'} \Delta t' \sim (1 - \beta)^{3/2} \frac{1}{\omega}, \quad (15)$$

где  $\beta = v/c$ .

На Рис. 12 показаны графики зависимости электрического поля излучения от времени при разных скоростях, рассчитанные по точной формуле (12). Видно, что при скоростях движения заряда близких к скорости света, длительность импульсов излучения становится очень малой, зато амплитуда электрического поля  $E_{\max} = Q\beta^2 / [rR(1 - \beta)^2]$  сильно растет.

---

<sup>12</sup> Как раз во столько раз видимое ускорение заряда больше истинного, а поле, как показано выше, пропорционально видимому ускорению.

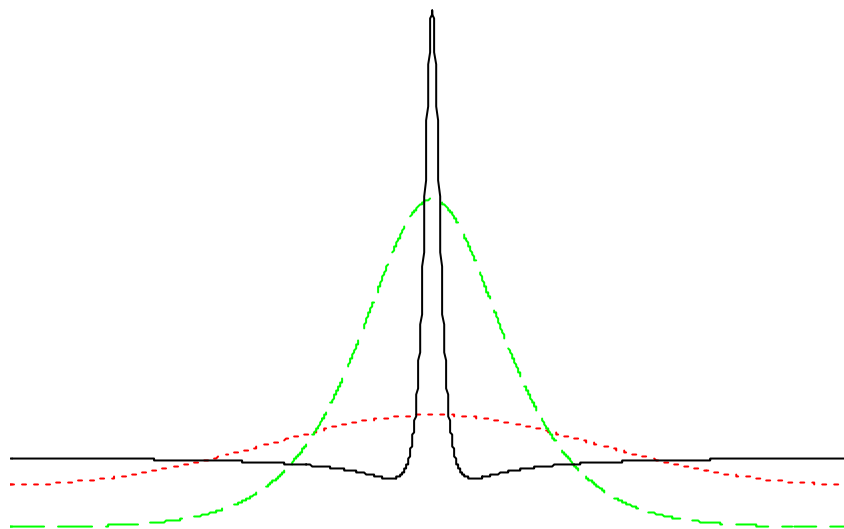


Рис. 12. Зависимости поля излучения от фазы  $\omega t$ , изменяющейся от  $-\pi$  до  $\pi$  (т. е. от времени). Пунктир -  $\beta = 0.05$ . Штриховая линия -  $\beta = 0.3$ , поле поделено на 10. Сплошная линия -  $\beta = 0.8$ , поле поделено на 500.

Глядя на Рис. 12 самое время вспомнить о разложении периодической функции в ряд Фурье, т. е. представлении функции в виде суммы синусов и косинусов с периодами, в целое число раз меньшими периода функции. Функции, показанные на Рис. 12 – четные, поэтому они разлагаются только по косинусам (которые тоже четны)

$$E_y(R, 0, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(n\omega t). \quad (16)$$

Члены этой суммы называются гармониками, а коэффициенты при косинусах – амплитудами гармоник<sup>13</sup>. Нулевая ( $n = 0$ ) гармоника – это средняя величина функции. Для поля излучения она равна нулю (т. к. поле пропорционально второй производной периодической функции). При малых скоростях в излучении есть только первая гармоника (см. формулу (11) для дипольного излучения и пунктирный график на Рис. (12)). С ростом скорости появляются высшие гармоники. Например, функцию, изображенную штриховым графом на Рис. 12, можно приближенно представить, как сумму четырех гармоник  $\cos(\omega t) + 0.585\cos(2\omega t) + 0.288\cos(3\omega t) + 0.134\cos(4\omega t)$ . Остальные гармоники относительно малы. Так как мощность излучения пропорциональна квадрату поля, то мощность каждой гармоники пропорциональна квадрату ее амплитуды.

<sup>13</sup> Почему в физике и технике чаще всего используется разложение по тригонометрическим функциям? Ведь есть большой выбор других систем функций от старинных ортогональных полиномов и функций Бесселя до новомодных вэйвлетов. Ответ прост – экспонента есть собственная функция оператора дифференцирования (т. е. бесконечно малого сдвига):  $d/dt[\exp(pt)] = p \exp(pt)$ , и  $\exp(-i\omega t) = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ .

Большинство физических процессов описывается автономными (т. е. не зависящими явно от времени) линейными дифференциальными уравнениями, решениями которых являются экспоненты.

Зависимость мощности гармоники от ее номера называется спектром периодического сигнала. Спектры излучения при разных скоростях заряда показаны на Рис. 13.

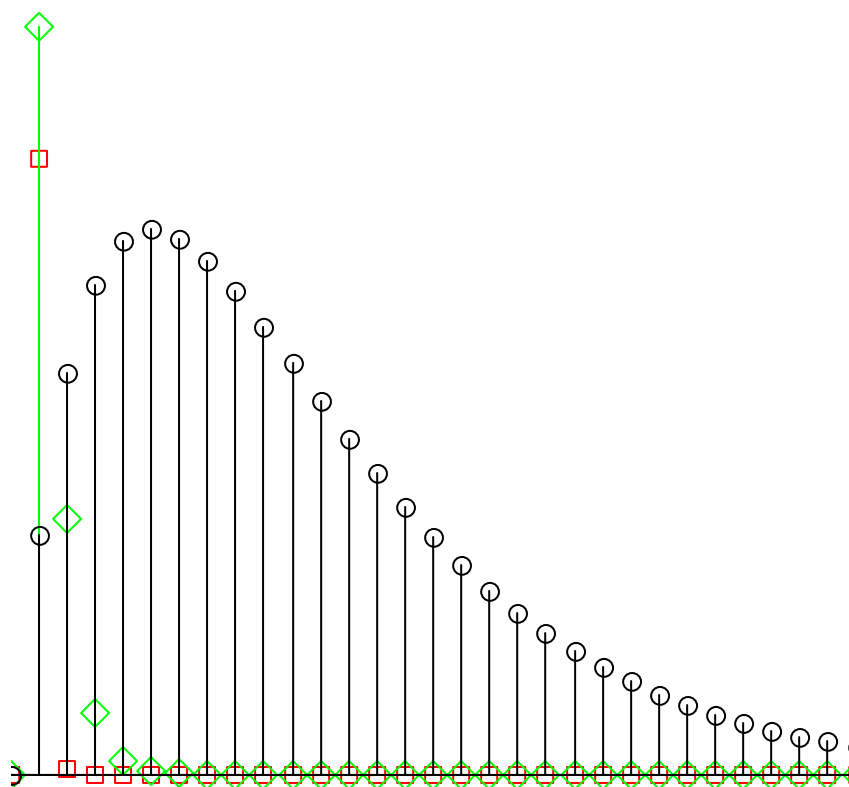


Рис. 13. Спектры излучения.  $\square$  -  $\beta=0.05$ .  $\diamond$  -  $\beta=0.3$ , поделено на 1000.  $\circ$  -  $\beta=0.8$ , поделено на 100000.

Из Рис. 13 видно, что чем ближе скорость заряда к скорости света, тем больше гармоник в спектре излучения. При скоростях, близких к скорости света, можно оценить количество гармоник, зная длительность импульсов излучения из оценки (15)

$$N \sim \frac{1}{\omega \Delta t} \sim \frac{1}{(1-\beta)^{3/2}}. \quad (17)$$

В современном ускорителе электроны относительно легко ускорить до скорости  $v = c(1-10^{-8})$ . В этом случае  $N \sim 10^{12}$ . Это значит, что при радиусе поворота  $r = 10$  м электрон будет излучать импульсы излучения длиной порядка  $r/N \sim 10^{-11}$  м = 0,1 ангстрем. В спектре излучения будут присутствовать все гармоники с номерами от 1 до  $10^{12}$ , т. е. гармоники с длинами волн от  $20\pi$  м (длина волны первой гармоники примерно равна периметру окружности, вдоль которой вращается электрон) до  $10^{-10}$  м – длины импульса излучения, умноженной на  $2\pi$ . Кстати, последняя величина, т. е. длина волны, начиная с которой гармоники спектра не малы,  $\lambda_c \sim R(1-\beta)^{3/2}$  называется критической длиной волны синхротронного излучения.

У излучения быстрых электронов есть замечательное свойство. Вклад в формирование короткого импульса излучения дает только окрестность наивысшей точки траектории ( $y = r, x = 0$ ), где «усиление поля излучения»  $(dt'/dt)^2 = 1/(1-\beta)^2$  максимально. Согласно формуле (14) длина этого участка траектории равна  $r\sqrt{1-\beta}$ , т. е. составляет лишь малую часть траектории электрона. Можно сказать, что излучение, распространяющееся параллельно оси  $x$ , испускается из точки траектории, в которой скорость параллельна оси  $x$ . С другой стороны, так как в поле излучения вносят вклад все точки участка длиной  $r\sqrt{1-\beta}$ , можно сказать, что из каждой точки траектории испускается излучение в направлениях близких к касательной (направлению скорости частицы) с малой угловой расходимостью  $\sqrt{1-\beta}$ . Короче говоря, быстрые частицы излучают, в основном, в направлении касательной к их траектории. Длина  $r\sqrt{1-\beta}$  называется длиной формирования синхротронного излучения. В приведенном выше численном примере она составляет всего 1 мм. Рассматривая быстрый электрон, летящий по произвольной траектории, у которой радиус кривизны мало меняется на длине формирования, мы можем применять к его излучению все формулы для синхротронного излучения. Практически важным примером являются магнитные системы циклических ускорителей заряженных частиц, которые состоят из отдельных магнитов (где частицы движутся по дугам окружностей) длиной несколько метров, что обычно гораздо больше длины формирования.

Благодаря тому, что в данную точку наблюдения приходит излучение из одной точки окружности-траектории, можно нарисовать простую, но поучительную картинку – «мгновенную фотографию» точек, где поле излучения не мало (Рис. 14).

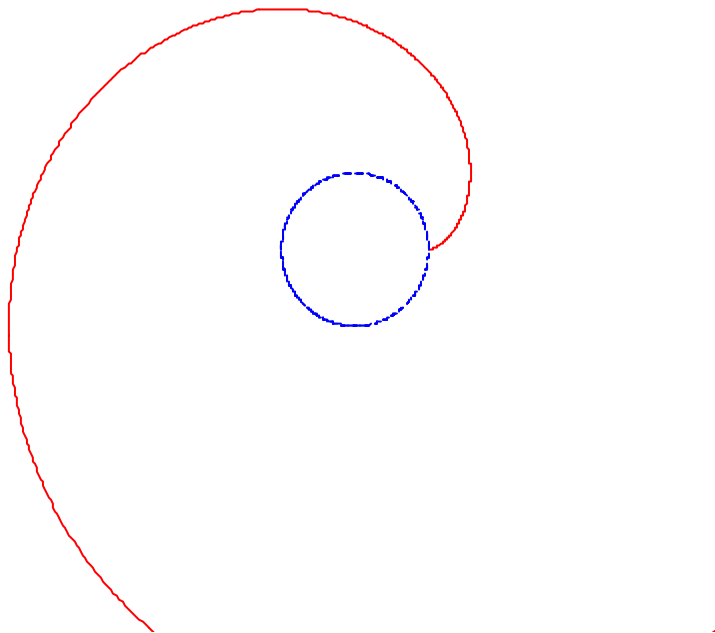


Рис. 14. Область, где находится поле излучения, лежит вблизи плоскости вращения электрона и имеет вид спирали (эвольвенты окружности).

Глядя на Рис. 14, надо представлять, что рисунок вращается по часовой стрелке вокруг центра окружности с такой угловой скоростью, что точки окружности движутся со скоростью света (мы рассматриваем предел  $v \rightarrow c$ ). Кривая, на которой находится излучение, характеризуется следующим свойством. Если из любой точки окружности провести касательный луч в направлении по часовой стрелке, то этот луч пересекается с кривой излучения нормально (перпендикулярно касательной к кривой в точке пересечения). Такая кривая называется эвольвентой (разверткой) окружности. При вращении рисунка точка пересечения этой кривой с определенным выше неподвижным касательным лучом движется со скоростью света.

Как и в случае дипольного излучения, мы можем сказать, что поле излучения отрывается от ускоренного заряда. Для синхротронного излучения картина еще более наглядна – поле, оторвавшееся из-за конечности скорости распространения, отлетает в направлении скорости электрона, т. е. «движется по инерции».

### Излучение при движении заряда по синусоидальной траектории

Как было показано в предыдущем пункте, при движении по окружности релятивистского электрона излучение приходит к наблюдателю только с длины формирования  $r\sqrt{1-\beta}$ , которая составляет малую долю всей траектории. Если мы хотим использовать это излучение, то желательно увеличить его интенсивность. Этого можно добиться, собирая излучение из нескольких точек траектории электрона. Так как высокочастотная часть синхротронного излучения излучается, в основном, в направлении движения электрона, оптимальная траектория должна слабо отклоняться от направления, в котором мы хотим повысить интенсивность. Простейшей и наиболее распространенной в практических применениях является косинусоидальная траектория с периодом  $\lambda_w = 2\pi/k_w$ , заданная уравнениями

$$x = \frac{1}{k_w^2 r} \cos(k_w z), \quad y = 0. \quad (18)$$

При такой траектории излучение в направлении оси  $z$  идет из окрестностей точек  $z = n\pi/k_w$  ( $n$  – целое), где скорость направлена вдоль оси  $z$ . В этих точках кривизна траектории равна  $d^2x/dz^2 = -(-1)^n/r$ . Как будет видно далее, релятивистские частицы довольно трудно сильно отклонить от прямолинейной траектории, поэтому везде далее предполагается, что минимальный радиус кривизны траектории  $r$  значительно больше периода, т. е.  $k_w r \gg 1$ . Если радиус кривизны мало меняется на длине формирования  $r\sqrt{1-\beta}$ , т. е.

$$k_w r \sqrt{1-\beta} \ll 1, \quad (19)$$

то справедливы рассуждения и формулы предыдущего пункта. Следовательно, из всех четных точек излучения (максимумов косинусоиды) идут импульсы излучения, показанные на Рис. 12, а из нечетных (минимумов косинусоиды) – импульсы противоположного знака (т. е., «перевернутые»). Такая временная зависимость поля излучения изображена на Рис. 15.

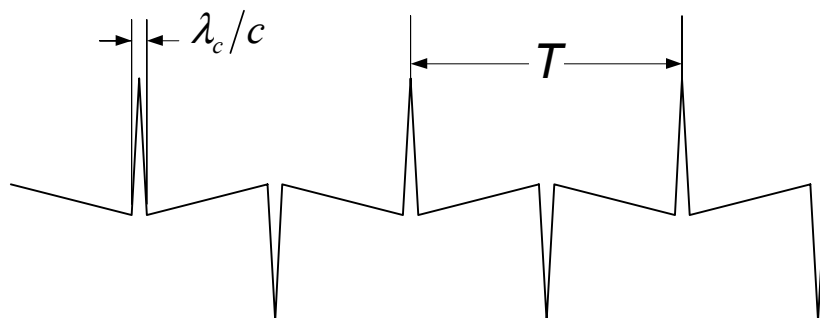


Рис. 15. Временная зависимость поля излучения из вигглера.  $T/2 \gg \lambda_c/c$ .

Временной интервал  $T$  между соседними положительными импульсами, т. е., период нашего сигнала находится аналогично тому, как было найдено сокращение в  $(1-\beta)$  раз задержки между приходом сигналов по сравнению с задержкой между актами их испускания (см. Рис. 11). Однако теперь надо учесть и непрямолинейность траектории, т. е. то, что искривленная траектория электрона длиннее отрезка прямой, вдоль которого распространяется свет. Действительно,

$$T = \int_0^{\lambda_w} \frac{dz}{v_z} - \frac{\lambda_w}{c} = \int_0^{\lambda_w} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} \frac{dz}{v} - \frac{\lambda_w}{c} \approx \frac{\lambda_w}{v} (1 - \beta) + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_w} \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \frac{dz}{v} = \frac{\lambda_w}{v} \left(1 - \beta + \frac{1}{4k_w^2 r^2}\right) \quad (20)$$

При разложении квадратного корня в формуле (19) мы использовали малость наклона траектории к оси  $z$ . Формула (20) показывает, что временной интервал между приходом импульсов из двух соседних максимумов отклонения косинусоидальной траектории электрона меньше разности соответствующих времен излучения в  $1/(1 - \langle \beta_z \rangle)$  раз, где

$\langle \beta_z \rangle = \beta - \frac{1}{4k_w^2 r^2}$  - средняя скорость движения вдоль оси  $z$ . Сравнив длительность

импульсов синхротронного излучения (15) с задержкой  $T/2$  между соседними импульсами, видим, что при выполнении условия (19) эти импульсы не перекрываются. Удобно ввести величину, характеризующую отношение периода траектории к длине формирования излучения

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_w r \sqrt{1 - \beta}} \quad (21)$$

Как уже отмечалось, длина формирования  $r\sqrt{1 - \beta}$  связана с угловым раствором конуса, в который излучается большая часть энергии  $\sqrt{1 - \beta}$ . Учитывая, что амплитуда колебаний угла между скоростью и осью  $z$  - это  $1/(k_w r)$ , видим, что  $K_0$  также имеет смысл отношения максимального угла отклонения траектории к характерной угловой расходимости излучения. Это проиллюстрировано на Рис. 16.

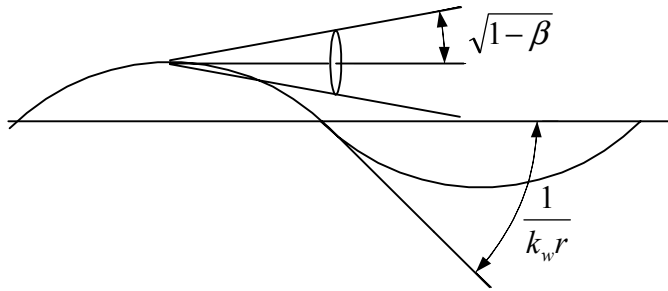


Рис. 16. Два характерных угла в задаче об излучении частицы, движущейся по синусоидальной траектории, - раствор конуса излучения  $\sqrt{1 - \beta}$  и амплитуда колебаний угла  $1/(k_w r)$ .

Условие (19) имеет вид  $K_0 \gg 1$ , а отличие средней скорости от скорости света (выражение в скобках в формуле (20)) -  $(1 - \beta)(1 + K_0^2/2)$ .

Спектр сигнала, изображенного на Рис. 15 похож на спектр синхротронного излучения, но в нем отсутствуют четные гармоники основной частоты  $2\pi/T$ , а нечетные имеют в четыре раза большую мощность. Кроме того, синусоидальный участок

траектории электрона всегда имеет конечную длину  $L$ , на которой укладывается  $N = L/\lambda_w$  периодов. Столько же периодов будет в импульсе излучения, изображенном на Рис. 15. Такой сигнал не является периодическим, и его нельзя представить в виде суммы счетного множества синусоид. Говорят, что спектр этого сигнала непрерывен.

С физической точки зрения понятие непрерывного спектра проще, чем понятие дискретного. Действительно, пусть у нас есть частотный фильтр в виде гармонического осциллятора (например, колебательного контура, соединенного с приемной антенной). После воздействия анализируемого импульса на осциллятор последний совершает колебания (трением, а, значит, затуханием колебаний осциллятора, пренебрегаем). Энергию, оставшуюся в осцилляторе после прохождения сигнала, называют спектральной плотностью сигнала на резонансной частоте осциллятора<sup>14</sup>. Измерив амплитуды колебаний большого набора осцилляторов с различными резонансными частотами, можно получить спектр сигнала. Например, спектральная плотность одного короткого импульса синхротронного излучения, показанного на Рис. 12 сплошной линией, изображается непрерывной кривой, проходящей через точки на графике (Рис. 13) мощностей гармоник дискретного спектра соответствующего периодического сигнала. При этом мощность гармоники периодического сигнала в квадрат частоты следования  $(1/T)^2$  раз больше спектральной плотности одного импульса. Такую зависимость мощности гармоники периодического сигнала легко понять. Действительно, полная мощность пропорциональна частоте прихода импульсов. Кроме того, с ростом частоты увеличивается расстояние между гармониками и падает их число. Поэтому мощность одной гармоники должна быть пропорциональна квадрату частоты следования импульсов.

Возвращаясь к сигналу, испускаемому электроном при прохождении синусоидальной траектории с  $N$  периодами, легко видеть, что его спектр будет похож на дискретный спектр сигнала с бесконечным числом периодов. При этом каждой гармонике дискретного спектра будет соответствовать спектральная линия с шириной  $\Delta\omega \sim 1/\Delta t$ , где  $\Delta t = NT$  – длительность сигнала. Действительно, пусть сначала измерительный осциллятор настроен точно на одну из частот  $2\pi n/T$ . Тогда каждый импульс сигнала будет вызывать максимальное приращение энергии осциллятора. Для того, чтобы последний импульс сигнала передал меньшую энергию надо изменить частоту осциллятора на  $\Delta\omega$  так, чтобы фаза колебаний осциллятора, вызванных первым импульсом, в момент прихода последнего импульса существенно (более, чем на один радиан) изменилась:  $\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$ .

В заключении этого параграфа сделаем замечание о понятии интерференции сигналов. Пусть в детектор приходят два импульса (например, два «всплеска» синхротронного излучения, показанных на Рис. 12) –  $E(t)$  и  $E(t-T)$ , задержанный относительно первого на  $T$ . Пусть показания детектора пропорциональны поглощенной энергии, т. е., интегралу от квадрата сигнала по времени

$$\int_{-\infty}^{\infty} [E(t) + E(t-T)]^2 dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} E(t)E(t-T) dt.$$

Если задержка  $T$  достаточно велика и импульсы не перекрываются, то второй интеграл равен нулю, а поглощенная энергия равна сумме вкладов от двух сигналов, т. е., удвоенной энергии от «всплеска». В случае малых задержек показания детектора изменятся. В частности, при  $T = 0$  показания детектора не удвоятся, а учетверятся. Говорят, что сигналы («всплески») интерферируют, если показания детектора не равны сумме показаний детектора, соответствующих отдельным «всплескам». Видно, что для

<sup>14</sup> Если на первоначально покоящийся гармонический осциллятор действует сила  $F(t)$ , т. е.  $x + \omega^2 x = F/m$ , то после окончания действия силы осциллятор приобретает энергию  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2 / (2m)$ . Вывод этой простой формулы можно найти, например, в учебнике Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Механика».

интерференции необходимо перекрытие сигналов по времени. Если сигналы разнесены по времени достаточно далеко, то интерференции нет. Для Фурье-гармоник ситуация кардинально меняется. Действительно, идеальные осцилляторы-анализаторы, описанные в предыдущем абзаце, колеблются бесконечно долго. Поэтому энергия колебания после прохождения двух «всплесков» пропорциональна

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} [E(t) + E(t-T)] e^{i\omega t} dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 4 \cos^2 \frac{\omega T}{2}.$$

Таким образом, для Фурье-гармоник

интерференция есть при любых задержках. Это не будет удивительным, если мы представим наш спектральный анализатор в виде совокупности вышеописанных узкополосного фильтра (осциллятора с очень малым трением) и широкополосного детектора. На выходе фильтра каждый «всплеск» порождает синусоидальный сигнал с частотой фильтра  $\omega$ , затухающий за очень большое время. Такие длинные «отфильтрованные» сигналы, порожденные разными «всплесками», всегда перекрываются. Если же мы используем реальный монохроматор с плохим спектральным разрешением  $\Delta\omega$ , то выходящие из него синусоидальные волновые пакеты (с длительностью  $1/\Delta\omega$ ) недостаточно растянуты, и при  $\Delta\omega T > 1$  не перекрываются. При этом детектор регистрирует сумму энергий от разных «всплесков», т. е. покажет отсутствие интерференции. На спектральном языке это значит, что «размазка» истинного спектра на  $\Delta\omega$  в неидеальном монохроматоре приведет к усреднению

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 4 \cos^2 \frac{\omega T}{2} \rightarrow 2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

## Движение заряженной частицы в магнитном поле

Следуя тому, как устроена электродинамика, которая позволяет найти поле по заданному движению заряда, выше мы не интересовались, каким образом можно создавать требуемые законы движения зарядов. Например, равномерное вращение заряда можно обеспечить, закрепив заряженный предмет на нити. Для отклонения электронов можно использовать электромагнитное поле. В начале статьи мы уже упоминали, что сила, действующая на покоящийся заряд, пропорциональна электрическому полю (см. формулу (4)). Для движущихся зарядов ситуация усложняется. В полное выражение для силы – силу Лоренца

$$\mathbf{F} = Q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (22)$$

- входит вторая составляющая<sup>15</sup> электромагнитного поля – магнитное поле  $\mathbf{B}$ .

Для нахождения закона движения электрона следует применить второй закон Ньютона  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ , который, в некотором смысле, является определением импульса  $\mathbf{p}$ . Кроме того, надо знать зависимость импульса от скорости частицы  $\mathbf{v}$ . Эти зависимости известны из экспериментов с различными частицами и имеют вид

$$\mathbf{p} = m \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}}, \quad (23)$$

причем коэффициент пропорциональности  $m$  называется массой<sup>16</sup>. Для разных частиц (протонов, нейтронов, электронов и др.) он различен. Массы элементарных частиц

<sup>15</sup> Это действительно вторая составляющая тензора электромагнитного поля, состоящего из вектора электрического поля и аксиального вектора магнитного поля.

<sup>16</sup> Даже при малых скоростях выражение для импульса  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  не так просто, как кажется на первый взгляд. В левой части этого равенства стоит дифференциальная 1-форма  $\mathbf{p}$ , а в правой – касательный вектор

постоянны, а, например, масса ракеты постоянно уменьшается. Множитель  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  равен 1 для малых (по сравнению со скоростью света) скоростей. Поэтому он называется релятивистским фактором. Зная зависимость импульса от скорости (23) легко получить изменение энергии

$$dE = \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{s} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = m \frac{v dv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + m \frac{v^2 (dv)}{c^2 [1-(v/c)^2]^{3/2}} =$$

$$m \frac{v dv}{[1-(v/c)^2]^{3/2}} = d \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right), \quad (24)$$

откуда с точностью до константы получается известное выражение для полной энергии  $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ .

Выше подробно обсуждалось, что для того, чтобы частицы излучали, надо, чтобы они двигались с ускорением. Для ускорения требуется сила, причем, как правило, сила Лоренца (22). Оказывается, что для статических (постоянных во времени) полей ее второй член, пропорциональный магнитному полю, гораздо больше. Действительно, максимальная достижимая величина электростатического поля ограничена пробоем на поверхности твердого тела, ограничивающего область, занятую полем. Порядок этой величины –  $10^7$  Вольт/м  $\approx 300$  Гаусс = 0,03 Тесла. Магнитное поле большой величины создается постоянными магнитами, электромагнитами с железными сердечниками, а также сверхпроводящими и импульсными электромагнитами. В первых двух случаях поле ограничено предельной намагниченностью (дипольным магнитным моментом единицы объема) вещества и составляет около 1 Тесла. В двух последних – прочностью токоведущих обмоток, на которые давит магнитное поле. При этом максимальная величина поля составляет соответственно 10 и 100 Тесла<sup>17</sup>. Итак, релятивистские частицы обычно поворачивают при помощи магнитостатического поля. Из формулы (22) для силы Лоренца видно, что магнитная часть силы перпендикулярна скорости и, следовательно, не меняет энергию и абсолютную величину вектора скорости. Вектор скорости просто поворачивается в магнитном поле

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{Q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \gamma m \dot{\mathbf{v}} \quad (25)$$

с частотой  $\boldsymbol{\Omega} = -Q\mathbf{B}/(\gamma mc)^{18}$ . Тогда частица движется по спирали, а в простейшем случае – по окружности радиуса  $r = pc/(QB)$ . Последнее равенство легко получается однократным интегрированием уравнения (25) по времени.

Для создания косинусоидальной траектории (18) достаточно пустить частицу в магнитное поле, которое в плоскости  $xz$  (т. е.  $y = 0$ ) имеет лишь вертикальную компоненту

$$B_y = B_0 \cos(k_w z). \quad (26)$$

Тогда  $r = pc/(QB_0)$ , а  $K_0 = \frac{QB_0}{k_w mc^2} \sqrt{\frac{1+\beta}{2\beta^2}}$ . Для ультрарелятивистских частиц квадратный корень в последней формуле очень близок к единице, поэтому во всех расчетах вместо  $K_0$

**v.** Следовательно, коэффициент пропорциональности между ними  $m$  есть тензор. В неискривленном пространстве этот тензор пропорционален единичному (т. е. изотропному).

<sup>17</sup> Так как давление магнитного поля в вакууме – это просто плотность его энергии  $\mathbf{B}^2/(8\pi)$ , то легко подсчитать, что полю 100 Тесла =  $10^6$  Гаусс соответствует давление 40 тонн/см<sup>2</sup>. Эту величину поучительно сравнить с пределом текучести меди – 4 тонн/см<sup>2</sup>.

<sup>18</sup> Вращение любого вектора  $\mathbf{a}$  вокруг оси  $\mathbf{n}$  с угловой частотой  $\boldsymbol{\Omega}$  задается уравнением  $\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}$ , где  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{n}$ .

используют параметр  $K = \frac{QB_0}{k_w mc^2}$ , который зависит только от амплитуды и периода

магнитного поля. Заметим еще, что для генерации излучения применяются самые легкие заряженные частицы – электроны. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что  $m$  – это масса электрона, а вместо  $Q$  писать заряд электрона  $e$ . Тогда  $K = B_0 \lambda_w / (2\pi mc^2 / e) \approx B_0 \lambda_w / (10,7 \text{ кГс} \cdot \text{см})$ .

## Вигглеры и ондуляторы

Магнитную систему, создающую знакопеременное периодическое магнитное поле (26), называют вигглером, или, точнее, плоским вигглером, т. к. траектория заряженной частицы в нем может лежать в плоскости  $xz$ . Слово вигглер происходит от английского глагола wiggle – покачиваться, извиваться, и напоминает нам о «колеблющейся» траектории (18). Часто вместо слова «вигглер» используют другой термин - ондулятор. Последний обычно применяется для вигглеров с большим (например, более 10) числом периодов. Кроме того, обычно считается, что параметр ондуляторности  $K$  у ондуляторов не более 10. Последнее связано с тем, что, как было показано выше, спектр излучения из вигглера при  $K \gg 1$  похож на спектр синхротронного излучения. Из-за сходства этих спектров иногда говорят, что поля излучения из разных точек излучения не интерферируют. Последнее, конечно, неточно. Интерференция есть всегда, и спектр излучения из многополюсного вигглера отличается от спектра синхротронного излучения из одного максимума магнитного поля. В спектре вигглера появляются линии с частотным периодом  $2\pi/T$ . С другой стороны, измеряя спектр прибором с плохим спектральным разрешением, мы не заметим этой разницы из-за «размазывания» линий на величину разрешения прибора. Другой причиной подобной «размазки» может быть разброс по скоростям в электронном пучке. В этом случае спектр излучения от электрона с энергией  $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$  сдвигается на  $\Delta\omega/\omega \approx 2\Delta\varepsilon/\varepsilon_0$ , и суммирование спектральной плотности по всем электронам в сгустке приводит к уширению спектральных полос.

Если это условие  $K \gg 1$  не выполняется, а, особенно, при  $K < 1$ , «всплески» излучения из разных максимумов магнитного поля сильно перекрываются. При этом число гармоник основной частоты  $2\pi/T$  в спектре излучения уменьшается. Особенно прост предельный случай  $K \ll 1$ , который мы рассмотрим подробнее.

## Ондуляторное излучение

Рассмотрим снова электрон, движущийся вдоль косинусоидальной траектории (18). При  $K \ll 1$  выполняется условие, противоположное (19)

$$k_w r \sqrt{1 - \beta} \gg 1. \quad (27)$$

Используя общую формулу для излучения точечного заряда (9) найдем поле на оси  $z$  снова получив и использовав (12)

$$E_x(0,0,R,t) = -\frac{e}{c^2 R} \frac{d^2 x(t')}{dt'^2} = -\frac{e}{c^2 R} \left[ \frac{d^2 x(t')}{dt'^2} \left( \frac{dt'}{dt} \right)^2 + \frac{dx(t')}{dt'} \frac{d^2 t'}{dt^2} \right]. \quad (12')$$

В случае малого поля ондулятора  $K \ll 1$  мы можем считать скорость электрона постоянной (т. е.,  $z_e = vt$ ), поэтому из (10) получаем

$$c(t - t') = R - vt', \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 - \beta}, \quad \text{и}$$

$$E_x(0,0,R,t) = \frac{e}{Rr} \left( \frac{\beta}{1 - \beta} \right)^2 \cos \frac{k_w \beta (ct - R)}{1 - \beta}. \quad (28)$$

Итак, излучение монохроматическое с длиной волны

$$\lambda = \lambda_w \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \approx \frac{\lambda_w}{2\gamma^2}. \quad (29)$$

Как и для синхротронного излучения, здесь работает эффект Доплера – увеличение частоты излучения в  $1/(1-\beta)$  раз по сравнению с частотой колебаний излучающего заряда. Отметим, что максимум поля совпадает с аналогичным выражением для синхротронного излучения.

Излучение вне оси  $z$  тоже легко находится. Введем углы  $\theta_x$  и  $\theta_y$ , такие, что в точке наблюдения  $x = R \sin \theta_x$ ,  $y = R \sin \theta_y$ ,  $z = R \sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}$ . Тогда

$$c(t-t') =$$

$$\sqrt{R^2 - 2x_e R \sin \theta_x - 2z_e R \sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y} + x_e^2 \sin^2 \theta_x + z_e^2 (1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y)} \approx . \quad (30)$$

$$R - x_e(t') \sin \theta_x - z_e(t') \sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y}$$

Тогда

$$\frac{dt}{dt'} \approx 1 - \beta \sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \sin^2 \theta_y} + \beta \frac{\sin \theta_x}{k_w r} \sin(k_w v t') \approx \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} + \frac{\theta_x K}{\gamma} \sin(k_w v t'). \quad (31)$$

В последнем равенстве мы перешли к пределу малых углов  $|\theta_x|, |\theta_y| \ll 1$  и ультрарелятивистского движения  $1 - \beta \ll 1$ . Из (31) следует обобщение выражения (29) для длины волны излучения

$$\lambda = \lambda_w \frac{dt}{dt'} \approx \lambda_w \left( \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \right). \quad (32)$$

Выражение в скобках есть не что иное, как отличие проекции скорости электрона на направление от источника до наблюдателя от скорости света. Из (32) видно, что длина волны излучения растет при удалении от оси  $z$ , вдоль которой движется электрон. Если вдали от излучателя на оси  $z$  поставить фотопленку, то можно получить картинку, показанную на Рис. 17.

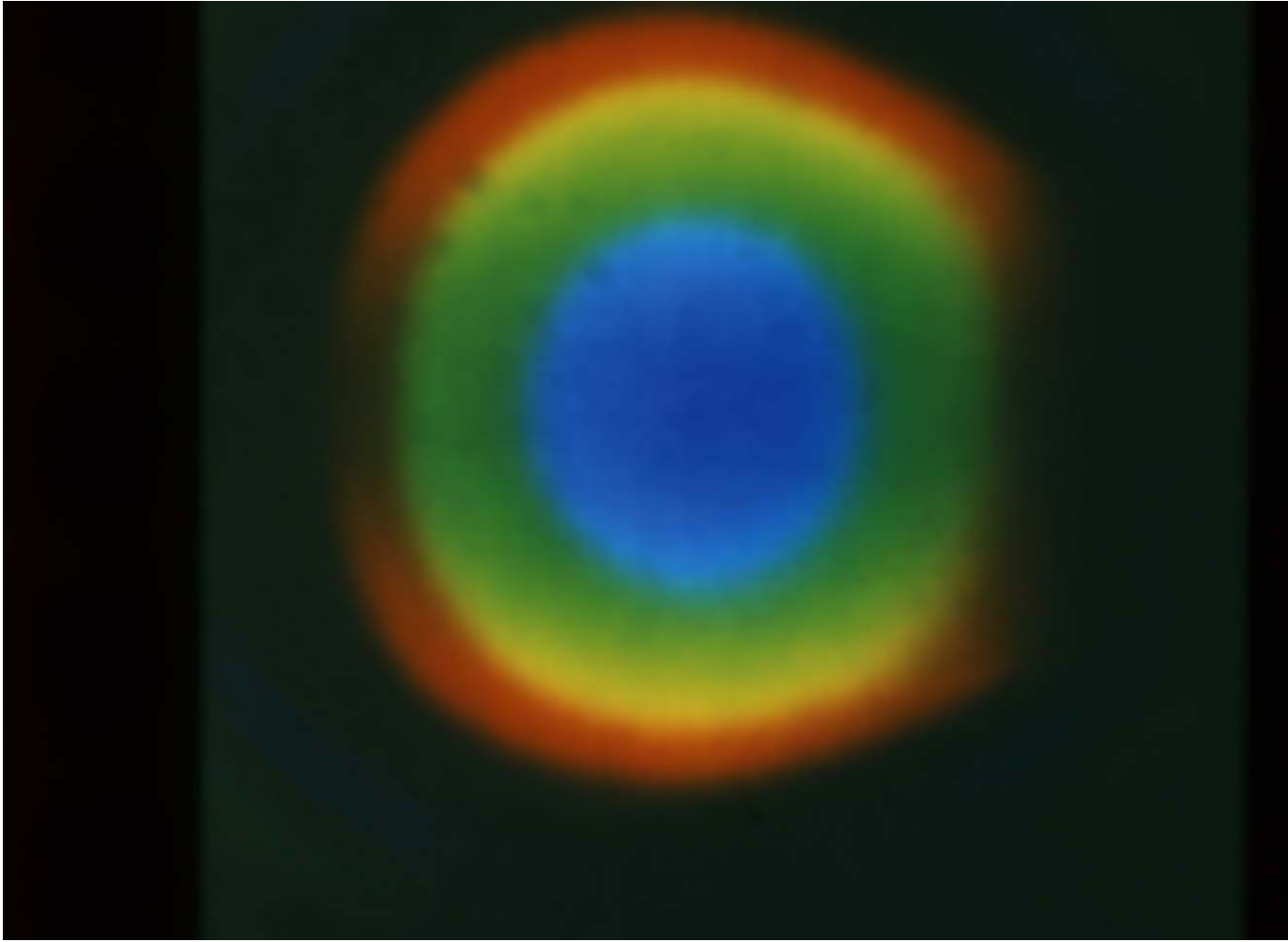


Рис. 17. Спонтанное ондуляторное излучение.

Напомним, что длина волны синего света – 0,45 микрона (микромметра), зеленого – 0,5 микрона, а красного – 0,65 микрона. Рассматривая Рис. 17 видим, что справа и слева от центра (оси  $z$ ) красного света почти не видно. Простые расчеты показывают, что поле излучения равно нулю при  $\theta_x = \pm 1/\gamma, \theta_y = 0$ . Если принять, что длина волны в центре Рис. 17 равна 0,4 микрона, то центры темных пятен под углами  $\theta_x = \pm 1/\gamma, \theta_y = 0$  должны согласно (32) находиться на кольце, где длина волны в два раза больше, чем в центре, т. е. при 0,8 микрона. Соответствующее кольцо имеет диаметр чуть больше, чем красное. Глаз и цветная фотопленка не видят это инфракрасное излучение, но из-за конечного размера темных пятен их края ослабляют красный свет.

Угловая зависимость длины волны ондуляторного излучения допускает простое геометрическое объяснение. Рассмотрим волновые фронты (поверхности постоянной фазы) соответствующие, например, максимумам ускорения (максимумам поля ондулятора). Пролетая последовательно через разные максимумы поля частица излучает сферические волны. Центр каждой сферы находится в своем источнике, как это показано на Рис. 18.

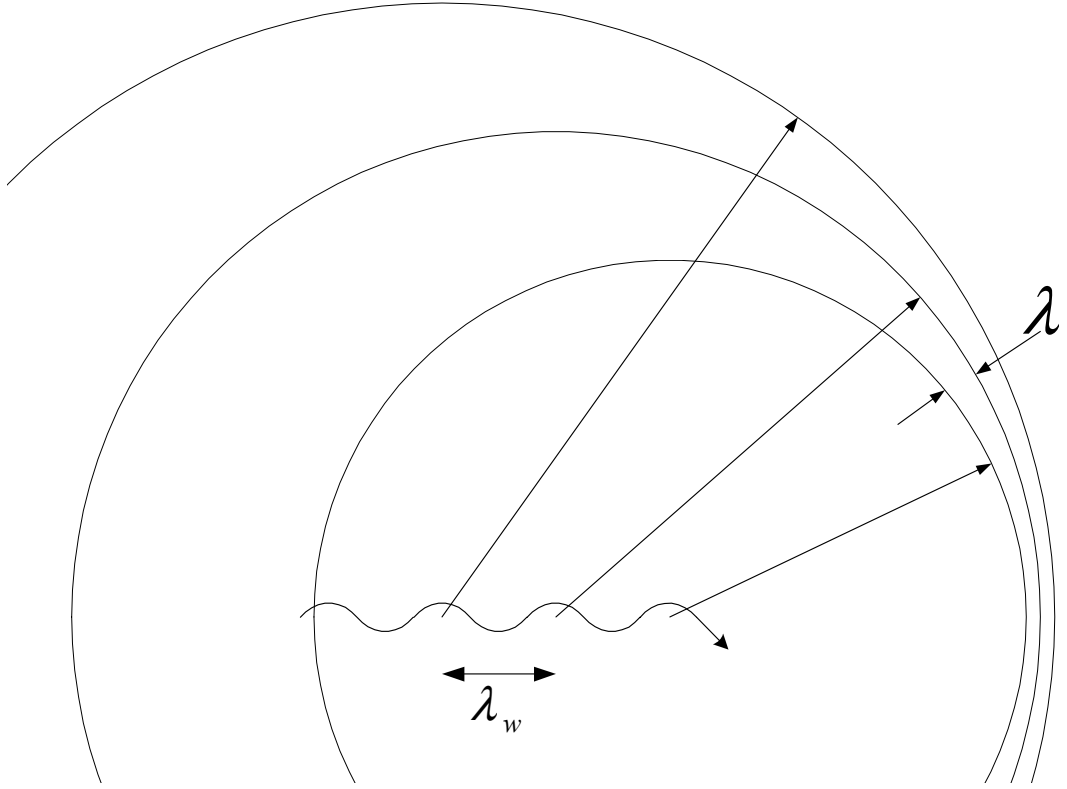


Рис. 18. Волновые фронты, испущенные из разных максимумов поля. Длина волны излучения вперед минимальна.

Тогда длина волны, т. е. расстояние между соседними волновыми фронтами равно

$$\lambda = \lambda_w \frac{1 - \beta \cos \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}}{\cos \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}} = \lambda_w \left( \frac{1}{\cos \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}} - \beta \right) \frac{dt}{dt'} \approx \lambda_w \left( \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \right).$$

Если параметр ондуляторности  $K$  не мал, то электрон движется по более извилистой траектории и его средняя скорость несколько уменьшается в соответствии с формулой (20). Тогда в выражение для длины волны (32) добавляется еще один член

$$\lambda = \lambda_w \frac{dt}{dt'} \approx \lambda_w \left( \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{K^2}{4\gamma^2} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \right). \quad (33)$$

Согласно (33) длину волны излучения можно изменять, меняя амплитуду магнитного поля ондулятора. Часто это гораздо проще, чем менять энергию электронов.

Поле излучения пропорционально  $(dt'/dt)^2$  (см., например, (12')). При отклонении от оси  $z$  на  $\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2} = (1 + K^2/2)/\gamma \equiv 1/\gamma_{\parallel}$  этот фактор спадает в четыре раза. Это дает основания утверждать, что почти вся мощность ондуляторного излучения идет в конус с образующей, наклоненной под углом  $1/\gamma_{\parallel}$  к оси  $z$ .

Полная мощность излучения для всех случаев движения частицы перпендикулярно магнитному полю находится по формуле

$$P = \frac{2 e^4 B^2}{3 m^2 c^3} (\beta\gamma)^2. \quad (34)$$

Для ондулятора со слабым полем ( $K \ll 1$ ) она (с точностью до численного множителя) может быть получена перемножением интенсивности  $cE_x^2(0,0,R,t)/(4\pi)$  на площадь  $\pi(R/\gamma)^2$ , поле на оси  $E_x$  берется из (28).

Если длина ондулятора  $L = N\lambda_w$ , то поле излучения представляет собой волновой пакет из  $N$  периодов, как это показано на Рис. 19.

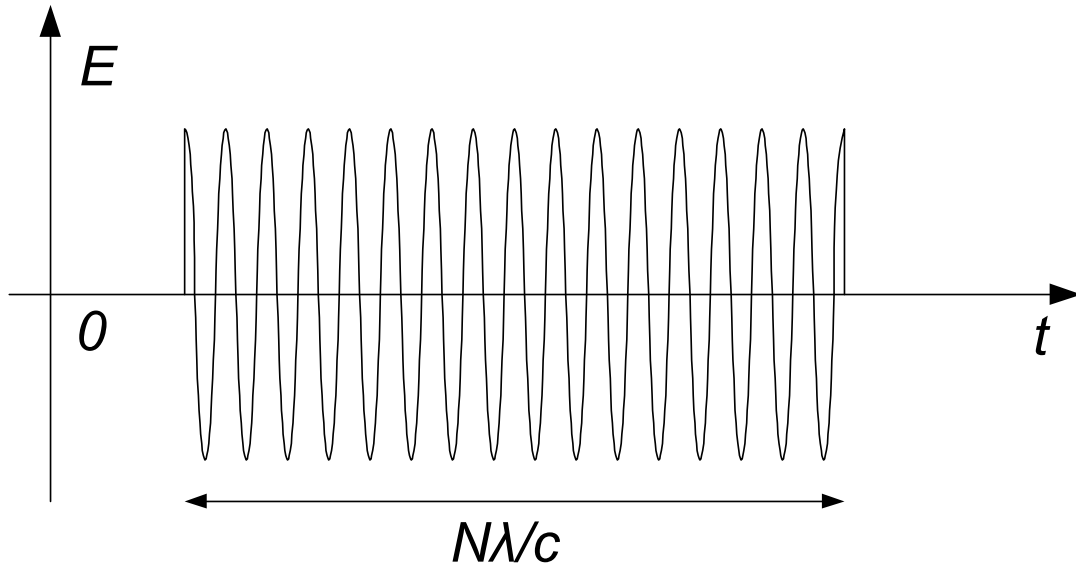


Рис. 19. Зависимость поля излучения из ондулятора конечной длины от времени.

В этом случае спектр излучения имеет ширину  $1/N$ . Действительно, временная зависимость поля излучения будет описываться выражением (28) только при  $-(L/2)/(1-\beta) < ct-R < (L/2)/(1-\beta)$ . Тогда  $E_\omega = \int_{R/c-L/[2c(1-\beta)]}^{R/c+L/[2c(1-\beta)]} E(t)e^{i\omega t} dt$ , и спектральная плотность пропорциональна

$$\left[ \frac{\sin\left(\pi N \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)}{\pi N \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}} + \frac{\sin\left(\pi N \frac{\omega + \omega_0}{\omega_0}\right)}{\pi N \frac{\omega + \omega_0}{\omega_0}} \right]^2 \approx \left[ \frac{\sin\left(\pi N \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)}{\pi N \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}} \right]^2. \quad (35)$$

Второй член в левой части выражения (35) отброшен из-за его относительной малости вблизи максимума, расположенного на частоте  $\omega_0 = k_w \beta c / (1 - \beta)$ .

## Ондуляторное излучение и теория относительности

Поучительно рассмотреть ондуляторное излучение с точки зрения наблюдателя, движущегося вдоль оси  $z$  с той же средней скоростью, что и электрон. Для этого надо знать, как преобразуются различные физические величины при переходе из одной системы отсчета<sup>19</sup> в другую (например, из неподвижной лабораторной системы в систему, движущуюся со средней скоростью электрона, которую называют сопровождающей, и обратно – из сопровождающей системы в лабораторную). Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца и являются предметом специальной теории относительности. Прежде всего нас будет интересовать движение заряда в сопровождающей системе. Поскольку новый наблюдатель движется со скоростью, равной средней скорости электрона, то в сопровождающей системе координат средняя скорость электрона равна нулю и можно считать, что он движется вблизи начала координат. Представим себе, что в лабораторной системе мы нарисовали траекторию движения электрона (косинусоиду) на листе бумаги, лежащем в плоскости  $xz$ . В сопровождающей системе лист и нарисованная на нем траектория будут двигаться со скоростью  $v$  в

<sup>19</sup> Система отсчета – это система координат и неподвижные часы.

отрицательном направлении оси  $z$ . Расположив измерительную линейку (неподвижную в его системе) вдоль оси  $x$  движущийся наблюдатель сможет измерить размах нарисованной косинусоиды. Этот размах должен быть таким же, как в лабораторной системе, что следует из эквивалентности («равноправности») систем отсчета. Таким образом, поперечные размеры и координаты не меняются при переходе из одной системы отсчета в другую.

Можно выразить этот факт по-другому. Расстояние между правым и левым колесами движущегося автомобиля можно измерить по неподвижным следам колес. При этом расстояние между следами будет равно расстоянию между колесами. А как измерить расстояние между передними и задними колесами, т. е. продольный размер движущегося объекта? Измеряя поперечные размеры мы смогли перейти от подвижного объекта – автомобиля – к неподвижному – следам колес. Исключив движение мы свели физическую задачу к геометрической с известным решением. Для продольного размера этого сделать нельзя. Трудность связана с самим понятием движения. Древние философы писали, что движущееся тело находится «здесь и не здесь». Иными словами, для измерения продольной координаты надо как-то прекратить движение. «Остановить мгновенье» можно при помощи фотографии. Измерив покоящееся изображение автомобиля мы сможем (зная масштабный множитель) найти расстояние между передним и задним колесом. Из-за конечности скорости света изображение движущегося предмета будет несколько искажено. Поэтому надо несколько модифицировать метод остановки движения. Проще всего считать, что в каждой точке пространства имеются часы синхронизованные между собой (т. е., показывающие одинаковое время). В некоторый момент времени мы можем определить в каких точках нашей покоящейся координатной системы находятся интересующие нас точки движущегося тела. Так мы (в принципе) можем получить неискаженный «трехмерный моментальный снимок». Как мы уже выяснили, поперечные размеры (разности поперечных координат  $x$  и  $y$  точек движущегося тела) будут такими же, как для покоящегося тела (т. е. в сопровождающей системе). Разности продольных координат будут в  $\gamma$  раз меньше, чем в сопровождающей системе отсчета. Другими словами, движущееся тело сожмется в направлении движения в  $\gamma$  раз.

Чтобы доказать факт такого сжатия, называемого Лоренцевым сокращением, рассмотрим простые опыты с движущимися стержнями длины  $l_0$ <sup>20</sup>. Пусть на одном конце стержня расположен источник света, испускающий очень короткий всплеск (похожий, например, на всплеск синхротронного излучения), и фотоприемник. На другом конце стержня установлено зеркало, отражающее сигнал обратно. Такое устройство представляет собой простейшие часы, «тикающие» с периодом, равным времени между испусканием и регистрацией сигнала  $2l_0/c$ . Рассмотрим работу таких часов, движущихся со скоростью  $v$  вдоль оси  $z$  и сориентированных перпендикулярно ей (например, вдоль оси  $x$ ). Как показано на Рис. 20, световой сигнал должен пройти вдоль боковых сторон равнобедренного треугольника, образованного положениями источника в момент  $t = 0$ , приемника в момент  $t = T/2$ , и фотоприемника при  $t = T$ .

---

<sup>20</sup> См., например, книгу В. А. Угарова «Специальная теория относительности», М., «Наука», 1969.

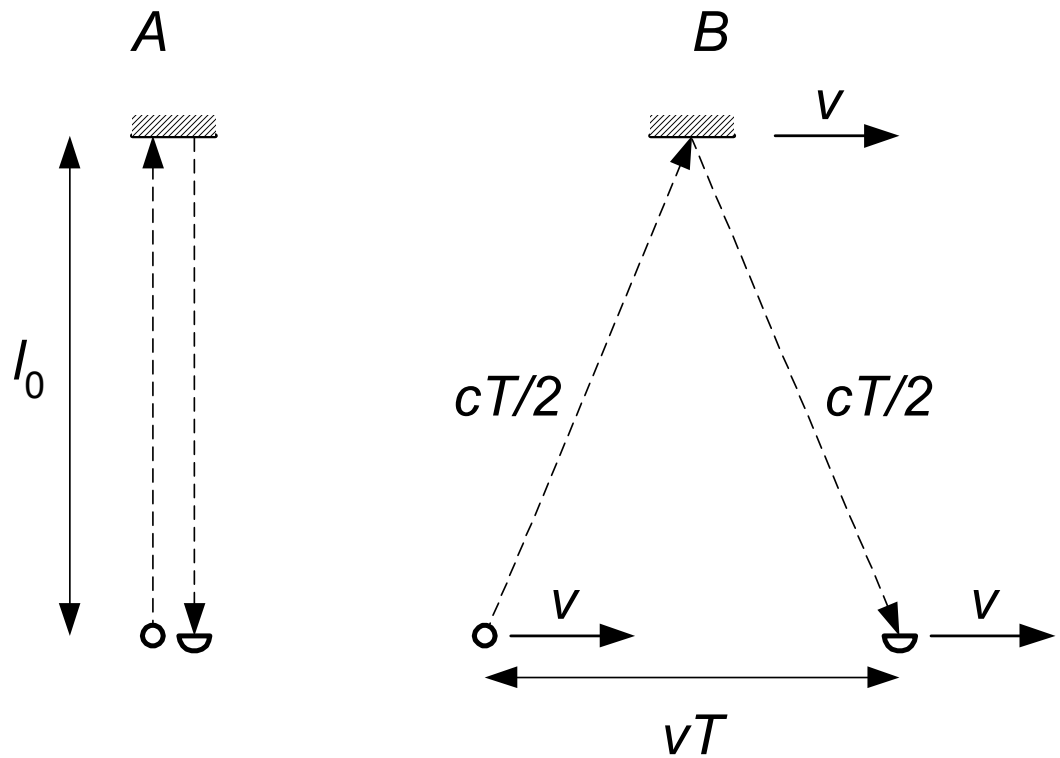


Рис. 20. А. Покоящийся стержень длиной  $l_0$  с установленными на концах излучателем, фотоприемником и зеркалом. Пунктиром показаны направления распространения светового сигнала. В. То же в лабораторной системе отсчета, где стержень движется.

По теореме Пифагора  $(cT/2)^2 = l_0^2 + (vT/2)^2$ , откуда

$$T = \frac{2l_0/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma \frac{2l_0}{c}. \quad (36)$$

Таким образом, движущиеся часы идут («тикают») в  $\gamma$  раз медленнее, чем покоящиеся. Для наших простейших часов причина этого тривиальна – световому сигналу требуется больше времени, чтобы пройти большее расстояние. Нетривиальным было предположение о том, что в движущейся вместе с «часами» системе отсчета скорость света (и, вообще, законы распространения электромагнитных волн) такая же, как в неподвижной системе отсчета. Сто лет назад замедление движущихся часов вызывало удивление. Позднее этот эффект был экспериментально изучен для нескольких типов движущихся систем.

Рассмотрим теперь тот же цикл работы простейших часов, когда стержень направлен вдоль скорости (см. Рис. 21), причем зеркало летит впереди.

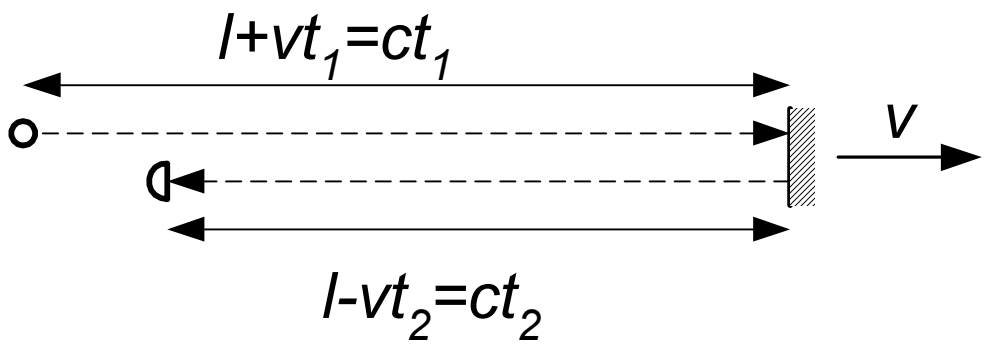


Рис. 21. Распространение светового сигнала, когда стержень направлен вдоль скорости его движения.

Из предыдущего абзаца мы знаем, что между излучением и регистрацией отраженного сигнала должно пройти время  $T = 2\gamma l_0/c$ . При движении от излучателя до зеркала свет проходит расстояние, большее длины стержня, и момент отражения  $t_1$  находится из уравнения  $ct_1 = l + vt_1$ . Аналогично, временной интервал между отражением и регистрацией сигнала можно найти из уравнения  $ct_2 = l - vt_2$ . Тогда

$$2\gamma \frac{l_0}{c} = t_1 + t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = 2\gamma^2 \frac{l}{c},$$

т. е.

$$l = \frac{l_0}{\gamma}. \quad (37)$$

Теперь мы можем описать движение электрона в ондуляторе в системе отсчета, движущейся со скоростью  $v$  (см. Рис. 22).

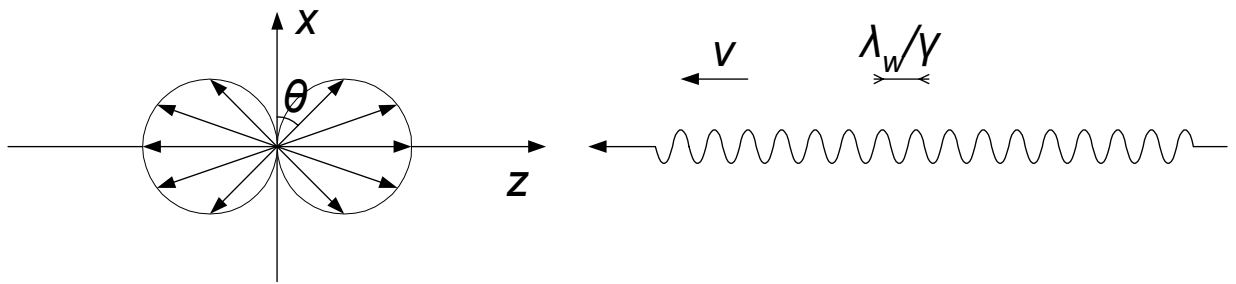


Рис. 22. Ондуляторное излучение в сопровождающей системе отсчета. Слева показана так называемая диаграмма направленности дипольного излучения (точнее, ее сечение плоскостью  $xz$ ). Длины стрелок, концы которых лежат на окружностях, пропорциональны амплитуде поля излучения в соответствующем направлении. Справа показано поле ондулятора, набегающее на электрон со скоростью  $v$ .

Размах нарисованной траектории электрона будет таким же, как в лабораторной системе, а период сожмется в  $\gamma$  раз. Эта нарисованная траектория будет «набегать» на электрон со скоростью  $v$ , следовательно, электрон будет совершать колебания вдоль оси  $x$   $x = x_{\max} \cos(\omega_c t)$  с периодом  $2\pi/\omega_c = \lambda_w/(\gamma v)$  и амплитудой  $x_{\max} = 1/(k_w^2 r)$ . Заметим, что частота колебаний  $\omega_c$  в  $\gamma$  раз выше, чем в лабораторной системе отсчета. Скорость электрона колеблется с амплитудой,  $\gamma v/(k_w r) = Kc$ , которая для малых  $K$  много меньше скорости света. Это значит, что излучение будет дипольным (см. формулы (7) и (8)). Тогда картина излучения в сопровождающей системе очень проста. Величина электрического поля равна

$$E(R, \theta, t) = \frac{e\omega_c^2 x_{\max}}{c^2 R} \sin \theta \cos \left[ \omega_c \left( t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (38)$$

где  $\theta$  – угол между направлением от начала координат, вблизи которого находится заряд, к точке наблюдения и осью  $x$ , вдоль которой колеблется заряд. Излучение во всех направлениях имеет одну и ту же частоту – частоту колебаний заряда  $\omega_c$ . Амплитуда поля,  $a$ , значит, и интенсивность излучения, обращаются в нуль вблизи оси  $x$ .

Рассмотрим теперь преобразование частоты плоской световой волны при переходе из сопровождающей системы отсчета в лабораторную. Пусть сначала волна бежит вдоль оси  $z$  вперед, т. е. поле пропорционально  $\cos[\omega_c(t - z/c)]$ . Если на пути волны находится покоящийся в сопровождающей системе заряд, то он испытывает действие поперечной силы с периодом  $2\pi/\omega_c$  (и колеблется в поперечном направлении с тем же периодом).

Наблюдая тот же процесс в лабораторной системе мы должны увидеть поперечное движение с периодом в  $\gamma$  раз больше. С другой стороны, продольная скорость частицы равна  $v$ , и фаза волны  $\omega(t - vt/c)$  в лабораторной системе отсчета меняется с частотой  $\omega(1 - v/c)$ . Приравнявая эти два выражения для частоты поперечных осцилляций частицы, получаем формулу для преобразования частоты для волны, бегущей вперед (в том же направлении, в котором движется наша подвижная система отсчета)

$$\omega = \omega_c \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (39)$$

Для ондулятора частота излучения в сопровождающей системе равна  $\omega_c = \mathcal{K}_w v$  и мы можем снова найти частоту излучения вперед  $k_w v / (1 - \beta)$ .

Обобщим рассуждения предыдущего абзаца на волну, распространяющуюся в произвольном направлении, поле которой пропорционально  $\cos[\omega_c t - \mathbf{k}_c \mathbf{R}]$ . Здесь  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор с компонентами  $(x, y, z)$ , проведенный из начала координат в точку с указанными координатами, а вектор  $\mathbf{k}_c$  называется волновым вектором. Поверхности постоянной фазы  $\omega_c t - \mathbf{k}_c \mathbf{R} = \varphi = const$  – это плоскости, движущиеся в направлении волнового вектора со скоростью  $\omega_c / k_c$ . Так как мы рассматриваем электромагнитные волны, то скорость равна скорости света, следовательно  $k_c = \omega_c / c$ . В лабораторной системе наша волна будет иметь другую частоту и волновой вектор. Найдем их. Во-первых, заметим, что поперечные компоненты волнового вектора  $(k_c)_x$  и  $(k_c)_y$  не изменятся при переходе в лабораторную систему,  $(k_c)_x = k_x$  и  $(k_c)_y = k_y$ . Действительно, поперечные координаты  $x$  и  $y$  не меняются а  $(k_c)_x$  и  $(k_c)_y$  тоже должны быть инвариантны. Последнее легко видеть, например, рассмотрев комбинацию двух бегущих волн  $\cos[\omega_c t - (k_c)_x x - (k_c)_z z] + \cos[\omega_c t + (k_c)_x x - (k_c)_z z] = 2 \cos[(k_c)_x x] \cos[\omega_c t - (k_c)_z z]$ .

Плоскости нулевой амплитуды, находящиеся при  $x = \pi(n + 1/2) / (k_c)_x$  не должны сдвигаться. Во-вторых, запишем частоту колебаний заряда под действием волны в лабораторной системе  $\omega - k_z v$ . И, в-третьих, учтем, что  $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . Решая

уравнение  $\omega - v \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2} = \omega_c / \gamma$ , получим

$$\omega = \gamma [\omega_c + v(k_c)_z], \quad k_z = \gamma [(k_c)_z + v \omega_c / c^2]. \quad (40)$$

Посмотрим, например, как преобразуется частота и направление волны, идущей в сопровождающей системе перпендикулярно оси  $z$  (направлению движения), т. е. волна с волновым вектором  $(\omega_c/c, 0, 0)$ . Из (40) получаем  $\omega = \gamma \omega_c$  и  $k_z = \gamma v \omega_c / c^2$ , а  $k_x = \omega_c/c$  и  $k_y = 0$ . Следовательно, в лабораторной системе эта волна распространяется под углом  $\theta = \arcsin(k_x/k) = \arcsin(1/\gamma) \approx 1/\gamma$ , причем ее частота в два раза ниже частоты излучения вперед. Вообще, можно заметить, что излучение, почти изотропное в сопровождающей системе, переходит в лабораторной системе в конус с углом порядка  $1/\gamma$  вокруг положительного направления оси  $z$ . Кроме того, т. к. в сопровождающей системе интенсивность дипольного излучения вдоль оси  $x$  равна нулю, то в лабораторной системе интенсивность обращается в нуль вблизи угла  $1/\gamma$ . Эти результаты мы уже получали при обсуждении радужной картинки ондуляторного излучения без применения теории относительности (т. е., без перехода в сопровождающую систему и обратно). Применение разных способов получения одного и того же ответа всегда позволяет лучше понять физическое явление. Особенно полезно применять разные точки зрения, если мы несколько изменяем задачу (см. ниже).

Как уже отмечалось, поле излучения зависит только от движения заряда, но не от сил, вызвавших это движение. Рассмотренные выше колебания заряда вдоль оси  $x$  могут быть вызваны полем плоской монохроматической электромагнитной волны,

распространяющейся, например, вдоль оси  $z$  в отрицательном направлении,  $E_x = E_0 \cos(k_c z + \omega_c t)$ . Ситуация очень похожа на показанную на Рис. 22, только волна бежит не со скоростью  $v$ , а со скоростью  $c$ , и длина волны равна  $2\pi c/\omega_c$ . Тогда говорят, что волна рассеивается на заряде. При этом имеется в виду, что энергия волны, которая подходит к заряду вдоль оси  $z$ , затем расходится во все стороны от заряда в соответствии с формулой (38). Рассеяние электромагнитной волны на заряде называется Томсоновским или Комптоновским<sup>21</sup> рассеянием. Количественной мерой рассеяния является отношение рассеянной мощности к интенсивности падающей на рассеиватель плоской волны. Это отношение называется сечением рассеяния  $\sigma$ . В нашем случае полная мощность дипольного излучения с полем (38) получается интегрированием интенсивности по сфере радиуса  $R$

$$P = \int_0^\pi c \frac{\overline{E^2}}{4\pi} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{c}{3} (ek_c^2 x_{\max})^2. \quad (41)$$

Амплитуда волны, вызывающей колебания электрона с амплитудой  $x_{\max}$ , равна  $E_0 = m\omega_c^2 x_{\max}/e$ . Деля мощность на интенсивность падающей волны  $cE_0^2/(8\pi)$ , получаем формулу Томсона

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2, \quad (42)$$

где  $r_e = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  - постоянная, называемая классическим радиусом электрона.

В лабораторной системе отсчета частота падающей плоской волны  $\omega_0$  находится по формуле (40) с учетом того, что  $(k_c)_z = -k_c$ . Тогда  $\omega_0 = \omega_c \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ . Вспоминая выражение (39) для частоты излучения, рассеянного в направлении движения электрона (вдоль оси  $z$ ), приходим к выводу, что максимальная частота рассеянного излучения в  $\frac{1-\beta}{1+\beta} \approx 4\gamma^2$  раз

выше частоты рассеиваемой волны. Если, например, лазер с длиной волны 1 микрон светит навстречу электронному пучку с энергией 1 ГэВ ( $\gamma \approx 2000$ ), то длина волны излучения, рассеянного назад, будет в 16 миллионов раз короче. Излучение с такими малыми длинами волн обычно характеризуют не длиной волны, а энергией фотонов. При длине волны 1 микрон энергия фотона равна 1.24 эВ. Тогда энергия рассеянных назад фотонов будет в 16 миллионов раз выше, т. е. около 20 МэВ. Такие фотоны используются в экспериментах по ядерной физике. Можно сказать, что в описанном способе получения гамма квантов мы заменили ондулятор с магнитостатическим полем на бегущую волну лазерного излучения.

## Преобразования Лоренца

Сделаем еще замечание о паре, состоящей из вектора  $\mathbf{k}$  и скаляра  $\omega$ . Говорят, что они образуют четырехвектор  $(\omega, \mathbf{k})$ . Это означает, что при переходе из одной системы отсчета в другую, движущуюся в отрицательном направлении оси  $z$  со скоростью  $v$ , четыре числа  $(\omega, k_x, k_y, k_z)$  преобразуются по формулам (40), а  $k_x$  и  $k_y$  инвариантны. Такое преобразование называется преобразованием Лоренца.

Другим примером четырехвектора является энергия-импульс  $(E, \mathbf{p})$ . Предполагая, что в сопровождающей системе, где частица покоится, энергия-импульс имеет вид  $(mc^2, 0,$

<sup>21</sup> А. Комптон показал теоретически и экспериментально, что при высоких частотах частота света, рассеянного первоначально покоящимся электроном, меньше частоты падающей волны. Это смещение частоты, называемое эффектом Комптона, было одним из первых экспериментальных подтверждений квантовой теории.

0, 0), из преобразований Лоренца (40) получим обсуждавшиеся ранее зависимости (23) и (24) импульса и энергии от скорости.

Хорошо известным примером преобразований являются повороты, или вращения, в трехмерном пространстве, элементами которого являются (трехмерные) векторы. При поворотах векторов их длины не меняются. Рассмотрим это на примере радиус-вектора. Пусть имеется некоторая точка с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ . Радиус-вектор – это отрезок, проведенный из начала координат в выбранную точку. Если мы повернем нашу координатную систему, вокруг некоторой оси, например, оси  $z$  системы координат, на угол  $\varphi$  то координаты точки изменятся по известному закону

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi \\ y &= -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi, \\ z &= z_0 \end{aligned} \tag{43}$$

который можно записать в виде умножения столбца координат точки на матрицу преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Запись преобразования в виде матрицы удобна тем, что матрица не содержит координат данной точки, а зависит только от параметров самого преобразования (оси и угла поворота). В качестве столбцов в формулу (44) можно подставлять столбцы из компонент любого вектора (импульса, скорости, силы и т. д.). Легко проверить инвариантность длины:  $x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ . Преобразования (и их матрицы), сохраняющие длину, называются ортогональными. Последовательное применение двух преобразований поворота описывается произведением соответствующих матриц. Так как при этом длина вектора сохраняется, то результирующее преобразование и его матрица тоже являются ортогональными. Когда некоторое свойство преобразования сохраняется при последовательном применении двух преобразований, обладающих данным свойством, то говорят, что такие преобразования образуют группу. В нашем случае повороты образуют группу вращений трехмерного пространства, а про ортогональные матрицы говорят, что они образуют одно из представлений группы вращений.

Рассмотренное нами преобразование Лоренца тоже может быть записано при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ p_{x0} \\ p_{y0} \\ p_{z0} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Вектор энергии-импульса в этой формуле можно заменить любым другим четырехвектором (например,  $\omega, \mathbf{k}$ ), матрица преобразования будет той же. Для упрощения записи удобно выбрать в качестве единицы измерения времени не секунду, а единицу длины (например, сантиметр), деленную на скорость света. В этих единицах измерения скорость света равна единице, а все компоненты четырехвекторов имеют одинаковую размерность. В комбинации с трехмерными вращениями формула (45) позволяет получить матрицу преобразования для перехода в систему отсчета, движущуюся с произвольной скоростью и произвольно повернутыми осями координат. Множество таких преобразований образует группу, которая называется группой Лоренца. Группа Лоренца содержит и простые повороты, т. е. группа вращений трехмерного пространства является одной из подгрупп группы Лоренца. Преобразования Лоренца типа (45), когда все рассматриваемые системы отсчета движутся в одном и том же направлении (для преобразования (45) - вдоль оси  $z$ ), образуют подгруппы другого типа. Преобразования

Лоренца тоже имеют инвариант, аналогичный длине для поворотов. Это разность квадратов скаляра и длины вектора. Например, для пространства энергий-импульсов инвариантом является масса  $\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 (c = 1)$ . Действительно, эта инвариантность очевидна для поворотов и легко проверяется для простого преобразования (45), а композицией этих преобразований можно получить произвольное преобразование Лоренца.

Как и в случае трехмерных вращений, можно ввести радиус-вектор, но теперь четырехмерный, с координатами  $(t, x, y, z)$ . Говорят, что точка четырехмерного пространства<sup>22</sup> с такими координатами описывает событие, происшедшее в момент времени  $t$  в точке пространства (настоящего, трехмерного) с координатами  $(x, y, z)$ . Мы уже рассматривали частный случай преобразования Лоренца в пространстве радиус-векторов. Это было преобразование периода хода простейших часов (36). Инвариант в пространстве событий  $s = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$  называется интервалом. Для случая часов интервал между испусканием света и его регистрацией совпадает с интервалом времени между этими событиями в сопровождающей системе отсчета.

### Спонтанное, вынужденное и когерентное излучения

Вернемся к излучению. Как мы видели, электромагнитные волны излучаются электронами, движущимися с ускорением. Но в наших макроскопических масштабах мощность излучения одного электрона очень мала. Значит, для практических целей надо использовать много электронов. Например, в пламени свечи и в газоразрядной лампе излучает огромное количество атомов раскаленного газа (а в каждом таком атоме – электрон, движущийся вокруг ядра). Чтобы упростить картину можно мысленно заменить каждый атом зарядом, закрепленным на конце пружинки. В некоторый момент времени  $t_n$  заряд с номером  $n$  смещается от положения равновесия. После этого начинаются колебания заряда вокруг положения равновесия. Двигаясь при этом ускоренно, заряд излучает и теряет энергию. Поэтому через некоторое время колебания заряда и излучение прекращаются. Другим примером элементарного излучателя является электрон, влетающий в момент времени  $t_n$  в ондулятор конечной длины. Для простоты предположим, все «всплески»  $E_1(t - t_n)$  одинаковы и отличаются только временем «включения»  $t_n$ . Поле излучения многих зарядов будет равно сумме «всплесков» от каждого излучателя<sup>23</sup>  $E(t) = \sum_n E_1(t - t_n)$ . Пропустим этот сигнал через монохроматор, или частотный фильтр.

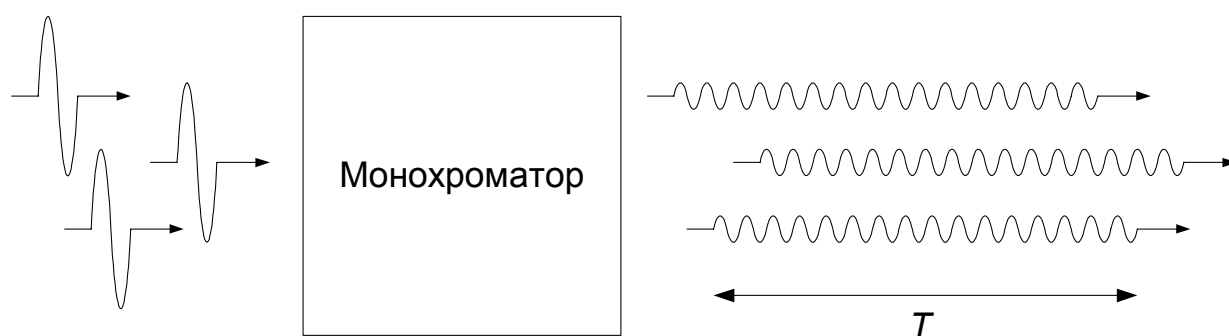


Рис. 23. «Всплески» излучения от трех излучателей проходят через монохроматор. С

<sup>22</sup> Речь идет не о реальном «физическом» пространстве, а о пространстве в математическом смысле этого слова, т. е. о множестве наборов из четырех чисел, которым можно сопоставить четырехмерное аффинное пространство.

<sup>23</sup> Мы считаем, что все излучатели находятся на одном и том же расстоянии от регистрирующего прибора, поэтому координата излучателя не вошла в аргумент поля.

выхода монохроматора идут волновые пакеты большой длительности с несущей частотой, на которую настроен монохроматор.

Как уже разъяснялось, монохроматор растягивает каждый «всплеск» излучения. Будем считать, что он преобразует всплеск  $E_1(t)$  в волновой пакет  $a \cos(\omega t) \vartheta(t - t_n) \vartheta(T - t + t_n)$  протяженностью от 0 до  $T$  ( $\vartheta(t) = 1$  при  $t \geq 0$  и  $\vartheta(t) = 0$  при  $t < 0$ ). Тогда на выходе монохроматора получаем сигнал

$$E_M(t) = a \sum_n \cos[\omega(t - t_n)] \vartheta(t - t_n) \vartheta(T - t + t_n) = \operatorname{Re} \left[ e^{-i\omega t} a \sum_n e^{i\omega t_n} \vartheta(t - t_n) \vartheta(T - t + t_n) \right]. \quad (46)$$

Как видно из (46) амплитуда сигнала есть сумма комплексных амплитуд отдельных излучателей  $\left| \sum_n a e^{i\omega t_n} \right|$ , причем в этой сумме следует учитывать только излучатели с  $t - T < t_n < t$ . Если мы имеем дело со стационарным процессом, то известна средняя частота срабатываний излучателей  $\nu$ . Тогда среднее число суммируемых амплитуд равно  $N = \nu T$ . Как правило, это огромное число. Более того, улучшая спектральное разрешение монохроматора, мы увеличиваем длительность  $T$  его отклика. Поэтому в пределе идеального монохроматора  $N$  неограниченно растет. Для увеличения спектральной плотности сигнала, пропорциональной

$$\left| \sum_n a e^{i\omega t_n} \right|^2 = \sum_m \sum_n a^2 e^{i\omega(t_n - t_m)}, \quad (47)$$

следует подобрать все времена срабатывания излучателей так, чтобы фазы спектральных гармоник  $\omega t_n$  были одинаковы (с точностью до  $2\pi$ ), как это показано на Рис. 24А. Можно, например, впускать электроны в ондулятор с временной задержкой в целое число  $q$  периодов, т. е.  $2\pi q/\omega$ , один относительно другого. Сделать это непросто, но так и делается в лазерах на свободных электронах (см. далее). Когда все элементарные излучатели оптимально синхронизованы (сфазированы), то говорят, что происходит когерентное излучение<sup>24</sup>. В этом случае амплитуда сигнала на выходе монохроматора будет (в среднем)  $Na$ .

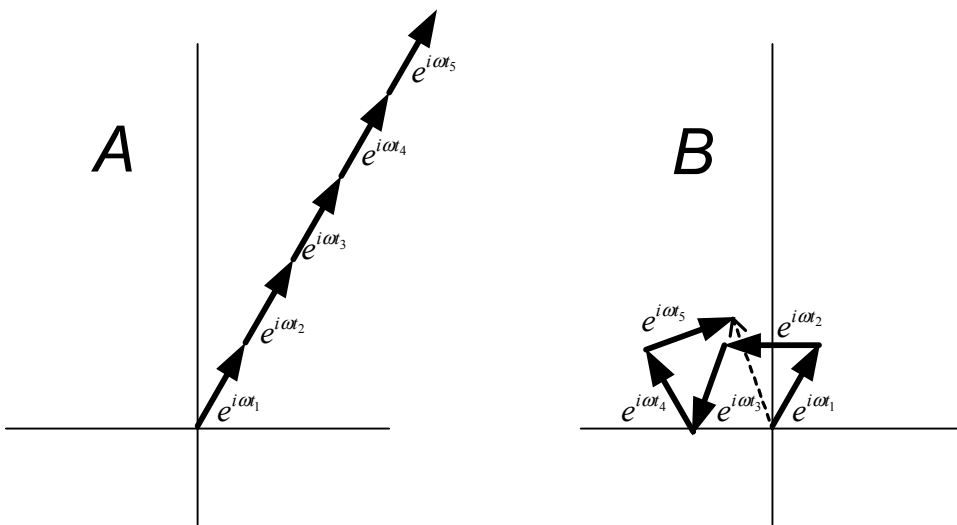


Рис. 24. Сложение спектральных гармоник от пяти излучателей. А – когерентное излучение. В – спонтанное излучение. Сумма показана пунктирной стрелкой.

<sup>24</sup> К сожалению, термин «когерентность» применяется для очень многих физических явлений, причем в разных смыслах.

В «типичном» случае вклады отдельных излучателей имеют разные фазы (см. Рис. 24В). Тем не менее, мы можем найти средний квадрат модуля комплексной амплитуды сигнала (47). Но сначала мы уточним понятие термина «среднее значение».

### Замечание об усреднении

Пусть имеется некоторая система, характеризуемая  $N$  числами, например,  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . В пространстве параметров системы задается неотрицательная функция  $f(t_1, t_2, \dots, t_N)$ , нормированная на единицу  $\int f dt_1 \dots dt_N = 1$ , где интеграл берется по всей области допустимых значений параметров системы. Эта функция называется плотностью вероятности, или функцией распределения. Ее смысл обычно объясняют так. Пусть параметры системы сначала неизвестны. Мы находим их при помощи каких-либо измерений. Пусть, кроме того, имеется очень большое количество эквивалентных экземпляров рассматриваемой системы, и у каждого экземпляра мы измерили параметры. Тогда доля экземпляров, попавших в малый  $N$ -мерный параллелепипед, описываемый неравенствами  $s_1 - \Delta t_1/2 < t_1 < s_1 + \Delta t_1/2, \dots, s_N - \Delta t_N/2 < t_N < s_N + \Delta t_N/2$ , (точнее, ее предел при неограниченном увеличении числа экземпляров и неограниченном уменьшении размеров параллелепипеда) равна  $f(s_1 \dots s_N) \Delta t_1 \dots \Delta t_N$ . Плотность вероятности напоминает рассуждения Платона об идеальных предметах, более реальных, чем наблюдаемые нами их несовершенные воплощения. «Воплощением» функции распределения являются гистограммы. Пространство параметров разбивается на конечные области, для конечного числа экземпляров системы проводятся измерения, а затем подсчитывается число экземпляров, попавшее в данную область пространства параметров. Математически плотность вероятности хорошо определена, т. к. она задает меру множеств в пространстве параметров. Средним значением, или математическим ожиданием, некоторой функции  $G(t_1, t_2, \dots, t_N)$  называется число

$$\langle G \rangle = \int G f dt_1 \dots dt_N. \quad (48)$$

Теперь мы знаем, что такое среднее. Но для вычисления спектральной плотности (47) надо знать плотность вероятности. Во-первых, мы предположим, что наши излучатели статистически независимы. Это значит что плотность вероятности есть произведение  $N$  функций, каждая из которых зависит только от одного времени  $t_n$ . Кроме того, из-за одинаковости излучателей эти функции должны быть одинаковы. Как это получается? Рассмотрим пример электронов в ондуляторе. Электроны появились, например, с поверхности катода нагретого до высокой температуры. Как правило, соседние по времени электроны вылетают из участков поверхности, расстояние между которыми довольно велико (миллиметры). Поэтому вылет одного электрона никак не влияет на движение другого. Тогда и говорят о независимости движения разных электронов. Эта независимость может затем нарушаться. Например, вылетевшие с катода электроны испытывают взаимное расталкивание (электрическое поле каждого электрона меняет импульсы других) и «выстраиваются» на примерно одинаковых расстояниях друг от друга<sup>25</sup>. Тогда многочастичная функция распределения уже не будет распадаться на одночастичные сомножители.

### Спонтанное, вынужденное и когерентное излучения (продолжение)

Для дальнейшего упрощения мы рассмотрим стационарный процесс, когда все плотности вероятности постоянны. Следовательно,  $\langle e^{i\omega t_n} \rangle = 0$ , и  $\left| \sum_n a e^{i\omega t_n} \right|^2 = \sum_n a^2 = N a^2$ . Это значит, что спектральная интенсивность излучения независимых излучателей есть

<sup>25</sup> Это явление использовалось для подавления флуктуаций тока в электронных пучках малошумящих ламп бегущей волны.

сумма спектральных интенсивностей отдельных излучателей. Заметим, что в этом случае мы сильно (в  $N$  раз) проигрываем по спектральной плотности по сравнению с когерентным излучением (когда все излучатели идеально синхронизованы)<sup>26</sup>. Излучение ансамбля независимых (несинхронизованных) излучателей называют спонтанным излучением.

Теперь мы несколько изменим наш эксперимент (см. Рис. 25).

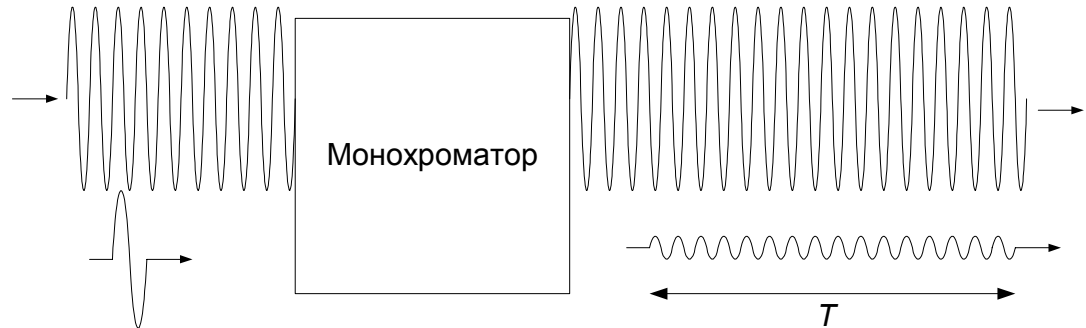


Рис. 25. «Всплески» от излучателя и монохроматический сигнал проходят через монохроматор.

Пусть кроме излучателя имеется «внешняя» плоская монохроматическая волна с частотой, на которую настроен монохроматор, и комплексной амплитудой  $A$ . Сигнал на выходе монохроматора мы снова можем изобразить на векторной диаграмме (Рис. 26).

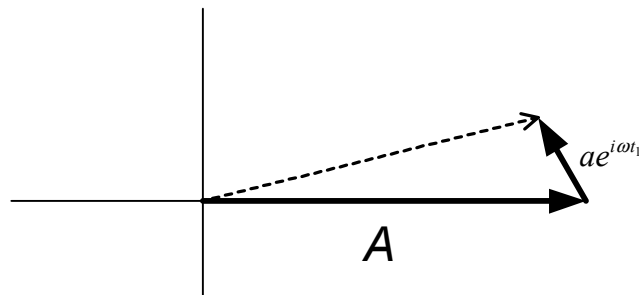


Рис. 26. Сложение спектральной гармоник излучателя с монохроматическим сигналом. Сумма показана пунктирной стрелкой.

Мощность выходного сигнала пропорциональна  $|A + ae^{i\alpha_1}|^2 = |A|^2 + 2 \operatorname{Re}(Aae^{-i\alpha_1}) + a^2$ , т. е., сумме мощности монохроматического сигнала, интерференционного члена и вклада спонтанного излучения  $a^2$ . Сужая частотную полосу монохроматора, мы уменьшаем амплитуду поля излучателя  $a$  на выходе монохроматора. Так как энергия прошедшего сигнала  $a^2T$  пропорциональна полосе монохроматора  $1/T$ , амплитуда  $a$  спадает, как  $1/T$ . Поэтому для достаточно хорошего монохроматора комплексная амплитуда сигнала излучателя много меньше амплитуды монохроматического сигнала. При этом вклад спонтанного излучения в прошедшую через монохроматор энергию  $|A + ae^{i\alpha_1}|^2 T = |A|^2 T + 2 \operatorname{Re}(Aae^{-i\alpha_1}) T + a^2 T$  стремится к нулю, а вклад интерференционного члена остается конечным. Если имеется много несинхронизованных излучателей, то, как и в случае спонтанного излучения,  $\langle e^{i\omega t_1} \rangle = 0$ . При этом мы можем понимать усреднение, как суммирование по большому числу излучателей с последующим делением результата

<sup>26</sup> В идеальном случае бесконечно длившегося процесса  $N \rightarrow \infty$  и спектральная плотность ондуляторного излучения частиц, пролетающих ровно через  $2\pi/\omega_0$ , имеет вид бесконечно узкого пика, т. е., пропорциональна дельта-функции  $\delta(\omega - \omega_0)$ .

на число излучателей. Итак, в среднем интерференционный член равен нулю, и мощность на выходе равна сумме мощности монохроматического сигнала и быстро спадающей с сужением полосы монохроматора мощности спонтанного излучения.

На самом деле это не совсем так. Дело в том, что до того, как попасть в монохроматор, монохроматическая волна находилась в той же области пространства, что и излучатель, и действовала на последний. В результате движение электронов в излучателе изменилось, причем это изменение зависело от фазы внешней волны. Теперь фазы излучателей несколько сдвинулись и средний интерференционный член отличен от нуля. Если суммарная мощность при этом уменьшилась, то говорят, что наши излучатели поглощают внешнюю волну. В противном случае они ее усиливают. Тогда и говорят о вынужденном излучении в том смысле, что излучатели отдают энергию в поле излучения быстрее, чем при спонтанном (самопроизвольном) излучении. Заметим, что спектр вынужденного излучения совпадает со спектром внешней волны. В нашем примере последний был бесконечно узким.

Чтобы продвинуться дальше, нам надо описать конкретные механизмы синхронизации излучателей внешней волной. Рассмотрим сначала уже упоминавшуюся простую модель атома – заряд на пружинке. Для того, чтобы такая модель хорошо работала, надо, чтобы частота колебаний такого осциллятора зависела от амплитуды колебаний. Это свойство осцилляторов, называемое неизохронностью, довольно обычно. Например, частота колебаний маятника уменьшается с ростом амплитуды колебаний. Другой практически важный пример – вращение<sup>27</sup> электрона в однородном магнитном поле (см. формулу (25)) с частотой  $\Omega = QB/(\gamma mc)$ , падающей с ростом энергии электрона. Итак, пусть у нас есть ансамбль одинаковых излучателей-осцилляторов, колеблющихся сначала с одинаковыми амплитудами, причем частота колебаний на этой амплитуде совпадает с частотой внешней волны. Пусть сначала излучатели распределены по фазам колебаний  $\omega t_n$  равномерно, т. е.  $\langle e^{i\omega t_n} \rangle = 0$ . Начальное распределение осцилляторов в плоскости фаза-энергия показано на Рис. 27А.

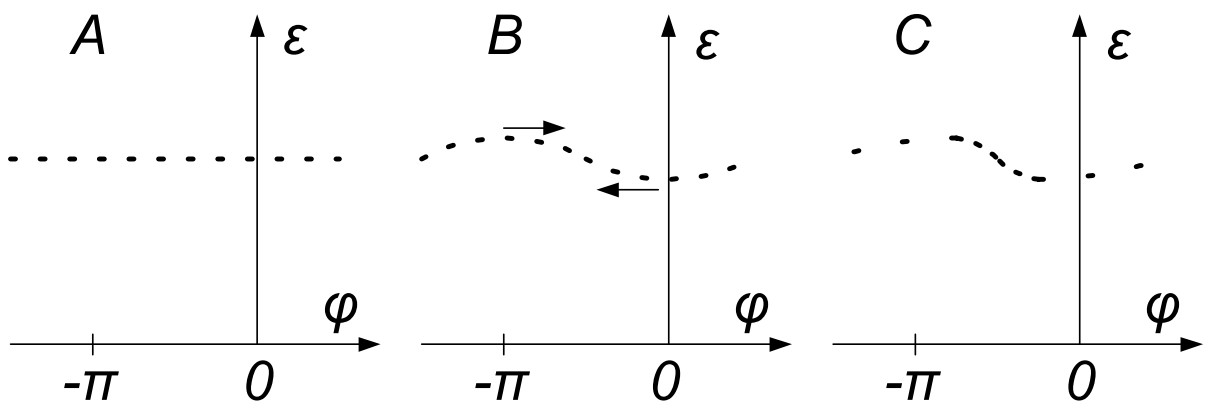


Рис. 27. Фазовая группировка осцилляторов в поле волны. А – начальное состояние. Все осцилляторы имеют одинаковые энергии и равномерно распределены по фазе. В – одни частицы потеряли энергию, а другие – приобрели. Распределение по фазе еще практически равномерное, но из-за зависимости частот от энергии фазы начали сдвигаться, как это показано стрелками. С – из-за сдвига фаз появились уплотнение вблизи  $\pi/2$  и разрежение вблизи  $-\pi/2$ .

Так как энергия, передаваемая осциллятором внешней волне, пропорциональна  $2 \operatorname{Re}(Aae^{-i\omega t_n})T$ , то половина осцилляторов теряет энергию, а другая – приобретает (см. Рис. 27В), и среднего обмена энергией между осцилляторами и волной нет. Однако энергия каждого осциллятора изменяется в зависимости от его начальной фазы. Из-за

<sup>27</sup> Вращение эквивалентно суперпозиции колебаний по двум координатам.

этого изменения энергии меняется частота колебаний осциллятора. Пусть, для определенности, частота падает с ростом энергии. Тогда у излучателей с фазами вблизи нуля частота возрастет, а у излучателей с фазами вблизи  $\pi$  – упадет. Фазы излучателей, теряющих энергию, будут уменьшаться, а у набирающих энергию – расти. В результате вместо равномерного распределения по фазам мы через некоторое время получим сгущение вблизи фазы  $-\pi/2$  и разрежение вблизи  $\pi/2$  (см. Рис. 27С). Так как обмена энергией между излучателем и волной при этих фазах не происходит, то мы не получим ни усиления ни поглощения. С другой стороны, фазировка излучателей интересна сама по себе. Например, их излучение будет до некоторой степени когерентным, в том смысле, что сумма их спектральных гармоник будет выглядеть, как нечто промежуточное между Рис. 24А и Рис. 24В.

Чтобы передать часть энергии осцилляторов внешней волне, т. е. усилить последнюю, надо сдвинуть относительную фазу осцилляторов (уже распределенных по фазам неравномерно) и волны. Проще всего сделать это, вводя начальную расстройку (разность) частот волны и осцилляторов. Тогда распределения осцилляторов, показанные на Рис. 27, будут «плыть» по фазе со скоростью  $\omega - \Omega(\epsilon_0)$ . Если начальная энергия  $\epsilon_0$  немного больше синхронной энергии  $\epsilon_s$ , при которой частоты осциллятора и волны совпадают, то вышеуказанная скорость положительна, и распределения «плывут» вправо. Значит, за время  $\pi/[2(\omega - \Omega(\epsilon_0))]$  уплотнение при  $-\pi/2$  сместится в нулевую фазу, где отбор энергии максимален, а разрежение при  $\pi/2$  – в фазу  $\pi$  с максимальной скоростью набора энергии. Как и в случае нулевой расстройки одни осцилляторы отдают энергию волне, а другие отбирают от нее энергию, но теперь первых стало больше. Поэтому при начальных энергиях осцилляторов выше синхронной происходит усиление волны. Наоборот, при начальных энергиях ниже синхронной происходит поглощение (в среднем) энергии излучателями-осцилляторами и ослабление внешней волны.

Простая модель, изложенная выше, была придумана в середине прошлого века академиком А. В. Гапоновым-Греховым. Затем он вместе со своими сотрудниками изобрел и разработал новый класс усилителей электромагнитного излучения – мазеры на циклотронном резонансе. В этих приборах электроны движутся в однородном магнитном поле по спиральным траекториям. Вращение электронов приводит к тому, что они излучают на циклотронной частоте  $\Omega = QB/(\gamma mc)$ . Мазеры на циклотронном резонансе, или гиротроны, используют явление вынужденного излучения этих электронов. Сейчас они позволяют получать излучение со средней мощностью порядка 1 МВт в миллиметровом диапазоне длин волн.

В реальных системах излучатели имеют разные начальные энергии. Тогда для усиления внешнего сигнала надо, чтобы излучателей с энергией, превышающей синхронную, было больше, чем излучателей с меньшей энергией. Такое начальное состояние называется «инверсной заселенностью». Это название объясняется тем, что в термодинамическом равновесии плотность вероятности (функция распределения) спадает с ростом энергии (соответствующее распределение называется распределением Гиббса). Поэтому в природе, где, в основном, имеет место локальное термодинамическое равновесие, преобладают процессы поглощения волн. По-видимому, поглощение волны резонансными частицами было впервые теоретически описано Л. Д. Ландау. Он исследовал затухание продольной плазменной волны. Можно сказать, что затухание Ландау – следствие поглощения (т. е. вынужденного процесса) продольных плазменных волн электронами плазмы<sup>28</sup>. Для некоторых неравновесных распределений электронов плазмы по энергиям может происходить усиление плазменных волн.

<sup>28</sup> Продольные плазменные волны могут иметь фазовую скорость меньшую, чем скорость электрона. Такие волны и излучает равномерно и прямолинейно движущийся электрон.

## Вынужденное ондуляторное излучение

Теперь мы вернемся к ондуляторному излучению. Для выяснения механизма синхронизации электронов в ондуляторе нам надо понять, как внешняя электромагнитная волна влияет на движение электронов. Как обсуждалось ранее электрон движется вдоль синусоидальной траектории (см. формулу (18)). Пусть вдоль оси  $z$  распространяется плоская монохроматическая волна  $E_x = E \cos(kz - \omega t)$ , см. Рис. 28.

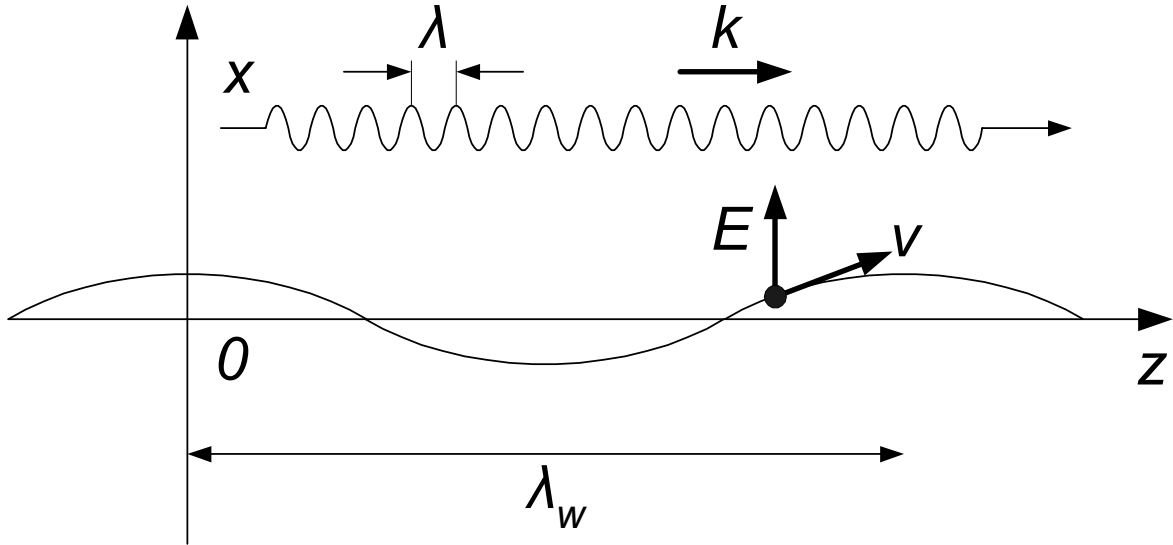


Рис. 28. Электрон движется вдоль косинусоидальной траектории. Плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$ .

Работа, совершаемая полем волны над электроном при его смещении вдоль траектории равна  $eE_x dx$ . Тогда изменение энергии  $\varepsilon = \gamma mc^2$  электрона можно записать, как

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = eE_x \frac{dx}{dz} \approx -\frac{eEK}{\gamma} \cos(kz - \omega t) \sin(k_w z). \quad (49)$$

При выводе этой формулы мы предположили, что поле волны мало меняет траекторию движения электрона. Кроме того, здесь и везде далее считается, что  $\gamma \gg 1$ . В качестве второй переменной, описывающей движение можно выбрать время прихода электрона в точку с координатой  $z$ . Тогда

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_z} = \frac{1}{\beta c} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} \approx \frac{1}{c} \left[ 1 + \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} - \frac{K^2}{4\gamma^2} \cos(2k_w z) \right]. \quad (50)$$

Система дифференциальных уравнений (49) и (50) полностью описывает продольное движение электрона в ондуляторе под действием электромагнитной волны. Пока эти уравнения выглядят достаточно сложно, но в процессе упрощения выявится их физический смысл и станет очевидным характер решений. Правая часть уравнения (49), которая может быть названа эффективной продольной силой, пропорциональна

$$\cos(kz - \omega t) \sin(k_w z) = \frac{1}{2} \sin[(k + k_w)z - \omega t] - \frac{1}{2} \sin[(k - k_w)z - \omega t], \quad (51)$$

т. е. является суммой двух бегущих волн. Первый член этого выражения имеет фазовую скорость  $\omega/(k + k_w) = c/(1 + k_w/k)$ , меньшую, чем скорость света, а второй -  $\omega/(k - k_w) = c/(1 - k_w/k)$ , т. е. большую. Если электрон будет двигаться вдоль оси  $z$  со скоростью медленной волны, то первый член в силе (51) будет постоянным и на достаточно большой длине ондулятора может значительно изменить энергию электрона. Назовем энергию такого электрона синхронной и запишем условие равенства скоростей,

которое называется условием синхронизма, подставляя вместо скорости электрона ее среднее по периоду ондулятора значение из формулы (50):

$$c \left( 1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2} \right) \approx c \left( 1 - \frac{k_w}{k} \right), \quad (52)$$

или

$$\lambda \approx \lambda_w \frac{1 + K^2/2}{2\gamma^2}. \quad (53)$$

Простое объяснение условия синхронизма состоит в следующем. Изменение энергии частицы происходит, в основном, на наклонных участках траектории. Пусть электрон пролетает такое место, например,  $z = \lambda_w/4$ , в момент времени, когда поле волны в этом месте максимально, например, при  $t = \lambda_w/(4c)$ . Тогда мощность, передаваемая электрону равна  $-eEvK/\gamma$ . В точку, отстоящую на  $\lambda_w/2$ , электрон попадет за время  $\lambda_w/(2v_z)$ . При этом фаза силы, действующей на него со стороны волны, изменится на

$$k \frac{\lambda_w}{2} - \omega \frac{\lambda_w}{2v_z} = k \frac{\lambda_w}{2} \left( 1 - \frac{c}{v_z} \right) = \pi,$$

т. е. при выполнении условия синхронизма сила сменит знак. Но поперечная составляющая скорости тоже изменит знак в этой точке. В результате мощность останется той же. Итак, электрон, будет ускоряться вдоль всего ондулятора (пока не выйдет из синхронизма из-за увеличения энергии). Наоборот, электрон с той же (синхронной) энергией, летящий на  $\pi/\omega$  позже будет все время замедляться.

Сравнив условие синхронизма в виде (53) с длиной волны спонтанного ондуляторного излучения (33), видим, что синхронная длина волны совпадает с длиной волны спонтанного излучения под нулевым углом (вперед). Это совпадение, конечно, не случайно. Если представить произвольное поле излучения в виде суммы большого числа плоских волн с различными волновыми векторами и поляризациями, то излучение – это действие заряда на волны, причем энергия передается от заряженной частицы каждой волне. В этом пункте мы рассматриваем действие волны на заряд. В обоих случаях условие синхронизма обеспечивает значительную передачу энергии за относительно большое время. Если условие синхронизма не выполнено, то скорость передачи энергии от частицы к волне (и обратно) все время меняет знак, и суммарная передача энергии мала. Отметим, что модель поля излучения, как совокупности независимых плоских волн, сильно отличается, от представления о поле излучения, как об «оторвавшейся» части электростатического поля. В классической электродинамике эти две модели согласуются между собой, и их поочередное применение позволяет лучше разобраться в физике различных явлений. Квантовая электродинамика опирается на модель независимых волн и, по-видимому, в связи с этим имеет некоторые противоречия.

Возвращаясь к условию синхронизма, предположим, что оно выполняется для энергии  $\varepsilon$  приближенно, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon_s(1+\delta)$ , где  $\varepsilon_s/(mc^2) = \gamma_s = \sqrt{(1/2 + K^2/4)\lambda_w/\lambda}$ , а  $\delta \ll 1$ . Заметим также, что последнее слагаемое в правой части уравнения (50) описывает модуляцию продольной скорости при движении по синусоидальной траектории. Для упрощения картины мы пренебрежем этим членом, что правильно при  $K \ll 1$ , а при больших  $K$  приводит к небольшому завышению эффективной продольной силы. Тогда вклад в обмен энергией между электроном и волной от второго слагаемого в правой части (51), называемого быстрой пространственной гармоникой, будет пренебрежимо мал по сравнению с вкладом первого слагаемого (медленной пространственной гармоники). Действительно, первое слагаемое почти постоянно, а второе – быстро осциллирует. Тогда зависимость энергии от продольной координаты будет суммой плавного изменения и «мелкой дрожи», которой можно пренебречь. Кроме того, выразим время прихода  $t$  через медленную (вследствие приближенного выполнения условия синхронизма) фазу

синхронной волны (фазу медленной пространственной гармоники)  $\varphi = (k + k_w)z - \omega t$ .  
 Наконец, будем измерять длину ондулятора в периодах, деленных на  $2\pi$ , т. е. введем безразмерную независимую переменную  $\zeta = k_w z$ . После этих замен уравнения продольного движения электрона (49) и (50) примут простой вид:

$$\frac{d\delta}{d\zeta} = -A \sin \varphi, \quad (54)$$

где  $A = \frac{eE\lambda K}{2\pi mc^2}$ , и

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = 2\delta. \quad (55)$$

Поведение решений этих уравнений легко проанализировать стандартными методами механики, но в добавок к ним мы используем механическую аналогию, так называемый математический маятник – груз малого размера массы  $M$ , вращающийся вокруг шарнира на стержне длины  $l$  (см. Рис. 29).

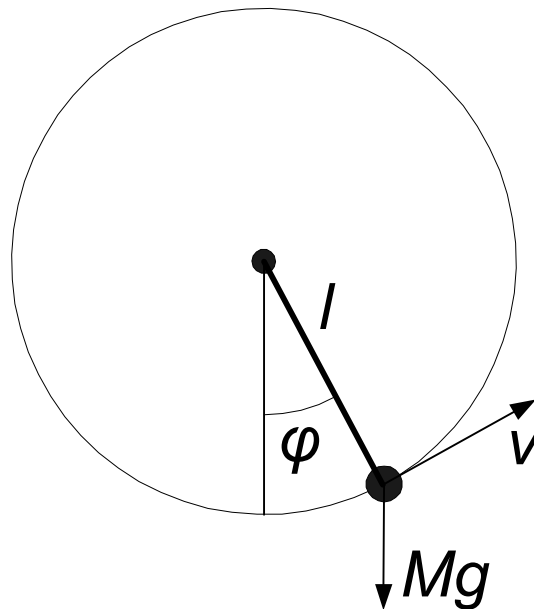


Рис. 29. Математический маятник.

Его уравнения движения  $dv/dt = -g \sin \varphi$  (второй закон Ньютона) и  $d\varphi/dt = v/l$  с точностью до обозначений совпадают с уравнениями продольного движения (54) и (55). Полная энергия математического маятника  $M[v^2/2 + gl(1 - \cos \varphi)]$  сохраняется. Следовательно, если мы нарисуем линии постоянной энергии на плоскости наших динамических переменных – скорости  $v$  и угла  $\varphi$  (см. Рис. 30), то движение маятника будет изображаться движением точки на этой плоскости вдоль одной из линий постоянной энергии.

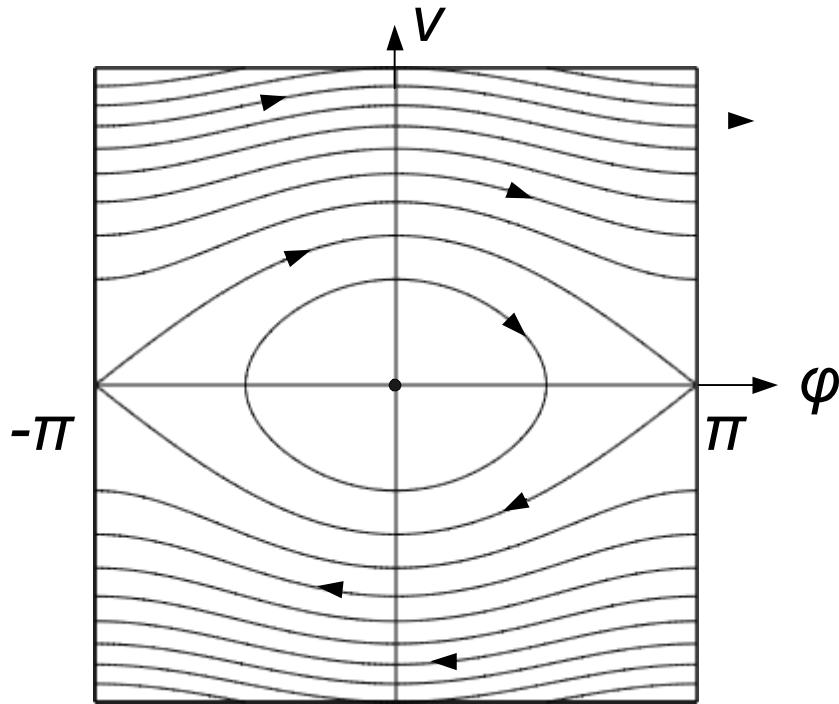


Рис. 30. Фазовые траектории математического маятника. Стрелками показаны направления движения вдоль фазовых траекторий.

Плоскость динамических переменных называется фазовой плоскостью, а линии постоянной энергии – фазовыми траекториями. Фазовая траектория в виде овала соответствует колебательному движению. Волнистые линии – вращения: верхние – против часовой стрелки (т. к.  $v > 0$ ), нижние – по часовой стрелке. Линия, похожая на косинусоиду, отделяет замкнутые фазовые траектории (колебания) от незамкнутых (вращений). Она называется сепаратрисой и соответствует движению маятника с полной энергией  $2Mgl$ , останавливающегося в верхнем положении (т. е. при  $\varphi = \pm \pi$ ).

Несмотря на качественную простоту поведения решений интересующей нас системы (54) - (55), решения выражаются через довольно громоздкие функции. Явное аналитическое решение может быть получено для малой амплитуды электромагнитной волны, когда мал параметр  $A$ . Тогда решение можно представить в виде рядов по этому параметру

$$\begin{aligned} \delta(\zeta) &= \delta^{(0)}(\zeta) + A\delta^{(1)}(\zeta) + A^2\delta^{(2)}(\zeta) + \dots \\ \varphi(\zeta) &= \varphi^{(0)}(\zeta) + A\varphi^{(1)}(\zeta) + A^2\varphi^{(2)}(\zeta) + \dots \end{aligned} \quad (56)$$

Верхние индексы в скобках просто показывают, что это разные функции (можно было бы обозначить эти функции разными буквами). Подставляя наше разложение в решаемую систему и приравнивая множители при одинаковых степенях  $A$  в левых и правых частях, можем последовательно найти решения нулевого, первого и других порядков. Физический смысл разложения по параметру  $A$  можно выяснить, используя аналогию с математическим маятником. Аналогом  $A$  является ускорение свободного падения  $g$ . Так как разложение, как правило, должно производиться по безразмерному параметру, то мы должны скомбинировать из параметров задачи безразмерный параметр, пропорциональный  $g$ , который затем будет считаться малым. Единственная безразмерная комбинация – это  $gt^2/l$ . Следовательно, наше разложение – это разложение по времени, а условием его хорошей сходимости является малость безразмерного параметра, и такой метод решения будет работать при  $t < \sqrt{l/g}$ , т. е. на временах, значительно меньших периода малых колебаний маятника  $2\pi\sqrt{l/g}$ . Возвращаясь к электронам в ондуляторе и

уравнениям (54) и (55), приходим к выводу, что истинным параметром нашего разложения будет не  $A$ , а  $2A\zeta^2$ , а условием применимости решений – малое расстояние от начала ондулятора  $\zeta < 1/\sqrt{2A}$ , или малая амплитуда электромагнитной волны  $2A < 1/\zeta^2$ .

Уточним теперь физическую постановку задачи. Она очень похожа на то, что мы обсуждали для ансамбля излучателей-осцилляторов. Мы предположим, что в ондулятор влетают электроны равномерно распределенные по фазам. Например, они могут влетать через равные промежутки времени с частотой, не являющейся произведением  $\omega$  на рациональное число. Энергию этих электронов  $\varepsilon_0 = \varepsilon_s(1+\delta_0)$  будем считать одинаковой. Мы хотим найти среднее изменение энергии электронов на выходе ондулятора, т. е. при  $\zeta = k_w L = 2\pi N$ . Для этого мы должны найти решение (56) с начальными условиями  $\delta_0, \varphi_0$ , а затем усреднить  $\delta$  по  $\varphi_0$ .

Мы могли бы пропустить последующие вычисления, но, как будет видно, они помогают создать ясную картину процесса вынужденного ондуляторного излучения. После подстановки разложений (56) уравнения (54) и (55) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^{(0)}}{d\zeta} + A \frac{d\delta^{(1)}}{d\zeta} + A^2 \frac{d\delta^{(2)}}{d\zeta} + \dots = -A \sin[\varphi^{(0)} + A\varphi^{(1)} + A^2\varphi^{(2)} + \dots] = \\ -A \sin \varphi^{(0)} - A^2 \varphi^{(1)} \cos \varphi^{(0)} + \dots \end{aligned} \quad (57)$$

и

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{d\zeta} + A \frac{d\varphi^{(1)}}{d\zeta} + A^2 \frac{d\varphi^{(2)}}{d\zeta} + \dots = 2\delta^{(0)}(\zeta) + A2\delta^{(1)}(\zeta) + A^2 2\delta^{(2)}(\zeta) + \dots \quad (58)$$

В нулевом порядке по безразмерной амплитуде волны  $A$ , т. е. при  $A = 0$ , энергия постоянна, т. е.  $\delta^{(0)}(\zeta) = \delta_0$ . Тогда интегрирование (58) дает  $\varphi^{(0)}(\zeta) = \varphi_0 + \delta_0 \zeta$ . Последнее равенство показывает, что частицы с большей энергией летят быстрее синхронной частицы и поэтому фаза  $\varphi$  действующей на них силы растет. Используя  $\varphi^{(0)}$ , найдем

$$\delta^{(1)} = -\int_0^\zeta \sin[\varphi^{(0)}(\zeta')] d\zeta' = -\frac{\sin(\delta_0 \zeta) \sin(\varphi_0 + \delta_0 \zeta)}{\delta_0}. \quad (59)$$

Удобно изобразить динамику электронов на графиках, аналогичных Рис. 27.

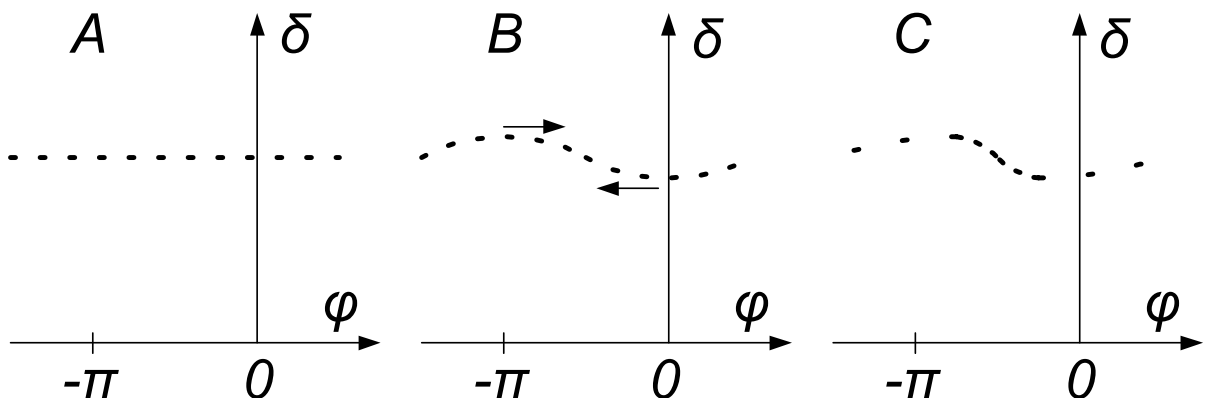


Рис. 31. Изменение энергий частиц, летящих в ондуляторе под действием попутной электромагнитной волны. А – начальное состояние. Все электроны имеют одинаковые энергии и равномерно распределены по фазе (т. е. по времени влета в ондулятор). В – одни частицы потеряли энергию, а другие – приобрели. Распределение по фазе еще практически равномерное, но из-за зависимости частот от энергии фазы начали сдвигаться, как это показано стрелками. С – из-за сдвига фаз появились уплотнение вблизи  $\pi/2$  и разрежение вблизи  $-\pi/2$ .

Из формулы (59) мы видим, что в первом порядке половина частиц ( $0 \leq \varphi_0 + \delta_0 \zeta < \pi$ ) теряет энергию, а другая – приобретает (см. Рис. 31 В), и средний обмен энергией между частицами и волной отсутствует. Это и понятно – в нашем приближении еще не учтена группировка частиц. Она появляется (см. Рис. 31 С) в том же первом приближении из-за поправки первого порядка к энергиям частиц:

$$\varphi^{(1)} = 2 \int_0^{\zeta} \delta^{(1)}(\zeta') d\zeta' = \frac{\sin(\varphi_0 + 2\delta_0 \zeta) - \sin \varphi_0}{2\delta_0^2} - \frac{\zeta \cos \varphi_0}{\delta_0}. \quad (60)$$

Как группировка зависит от начальной фазы, можно увидеть, записав

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_0} = \frac{d\varphi^{(0)}}{d\varphi_0} + A \frac{d\varphi^{(1)}}{d\varphi_0} + \dots = 1 + A \left[ \frac{\cos(\varphi_0 + 2\delta_0 \zeta) - \cos \varphi_0}{2\delta_0^2} + \frac{\zeta \sin \varphi_0}{\delta_0} \right] + \dots \quad (61)$$

Эта величина показывает, во сколько раз растягивается интервал начальных фаз  $d\varphi_0$ . Так как число частиц, заключенных в этом интервале, сохраняется, то во столько же раз уменьшается начальная плотность частиц (пропорциональная мгновенному значению тока электронного пучка). С учетом группировки количество замедленных и ускоренных частиц будет разным, и средняя энергия будет меняться вдоль ондулятора. Это видно из поправки второго порядка

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} &= - \int_0^{\zeta} \varphi^{(1)}(\zeta') \cos[\varphi^{(0)}(\zeta')] d\zeta' = \\ &= \frac{\cos(2\delta_0 \zeta) - 1 + 2\delta_0 \zeta \cos^2 \varphi_0 \sin(2\delta_0 \zeta) + 2\delta_0 \zeta \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos(2\delta_0 \zeta)}{4\delta_0^3} - \\ &= \frac{\sin(2\delta_0 \zeta) \sin(2\varphi_0 + 2\delta_0 \zeta)}{8\delta_0^3} \end{aligned} \quad (62)$$

Отсюда для среднего по начальным фазам изменения энергии получаем

$$\begin{aligned} \langle \delta - \delta_0 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\delta(\varphi_0, \delta_0) - \delta_0] d\varphi_0 \approx A^2 \langle \delta^{(2)} \rangle = \\ &= A^2 \zeta^3 \frac{\cos(2\delta_0 \zeta) - 1 + \delta_0 \zeta \sin(2\delta_0 \zeta)}{4(\delta_0 \zeta)^3} \end{aligned} \quad (63)$$

Используя выражение (59) можно вычислить среднеквадратичное отклонение энергии от начального значения

$$\langle (\delta - \delta_0)^2 \rangle \approx A^2 \langle (\delta^{(1)})^2 \rangle = \frac{A^2}{2} \left[ \frac{\sin(\delta_0 \zeta)}{\delta_0 \zeta} \right]^2. \quad (64)$$

Сравнение (63) и (64) дает простое соотношение

$$\langle \delta - \delta_0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{d\delta_0} \langle (\delta - \delta_0)^2 \rangle, \quad (65)$$

называемое теоремой Мэйди. Это равенство имеет глубокий физический смысл, который мы обсудим лишь вкратце.

Дело в том, что систему решаемых нами уравнений движения (54) и (55) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\zeta} &= - \frac{\partial H(\delta, \varphi, \zeta)}{\partial \varphi} \\ \frac{d\varphi}{d\zeta} &= \frac{\partial H(\delta, \varphi, \zeta)}{\partial \delta} \end{aligned} \quad (66)$$

Такие уравнения называются уравнениями Гамильтона. Символ  $\partial H(\delta, \varphi, \zeta) / \partial \varphi$  означает, что мы дифференцируем функцию нескольких переменных  $H(\delta, \varphi, \zeta)$  по одной из

переменных, в данном случае –  $\varphi$ , считая остальные переменные ( $\delta$  и  $\zeta$ ) постоянными. Для нашей системы  $H = \delta^2 - A \cos \varphi$ .  $H$  называется функцией Гамильтона. Часто она равна полной энергии системы. Например, для математического маятника  $H(J, \varphi) = J^2/(2Ml) + Mgl(1 - \cos \varphi)$ , где  $J = Mvl$  – момент количества движения. Уравнения Гамильтона с различными функциями Гамильтона описывают движение очень многих физических объектов, включая электромагнитное поле. Важность их роли в физике связана с тем, что они являются следствием так называемых вариационных принципов и на их основе строится квантовая теория. Соотношение (65) выполняется для широкого класса Гамильтоновых систем. Его геометрический смысл состоит в том, что площадь под кривой, на которой лежат точки, изображающие отдельные частицы, (см. Рис. 31) остается постоянной. Если вообразить, что эта кривая изображает поверхность жидкости, то сохранение площади под кривой соответствует несжимаемости этой жидкости.

Заметим еще одно неслучайное совпадение. Средний квадрат отклонения энергий электронов на выходе из ондулятора (64) пропорционален спектральной плотности спонтанного излучения (35) на частоте внешней волны. Это просто объясняется следующим образом. Пролетая через ондулятор все электроны излучают. В зависимости от момента влета электрона в ондулятор его излучение складывается с полем внешней волны в «правильной» фазе (когда волна усиливается) или наоборот. В первом случае электрон теряет энергию, переданную волне, пропорциональную произведению Фурье-гармонике поля спонтанного излучения на амплитуду внешней волны, а во втором – приобретает. Поскольку электроны равномерно распределены по времени влета в ондулятор, то (в первом приближении) половина электронов теряет энергию, а другая – приобретает, и после взаимодействия частиц с волной появляется энергетический разброс (64).

Возвращаясь к явному выражению для изменения энергии (63) видим, что эта величина сильно зависит от начального отклонения  $\delta_0$  энергии от синхронной энергии (см. Рис. 32).

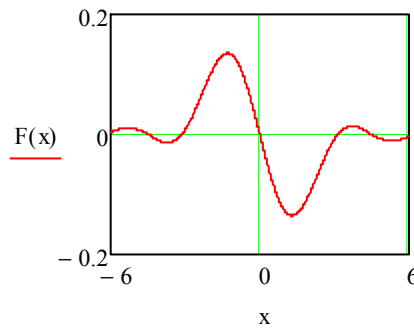


Рис. 32. Зависимость величины  $F(x) = [\cos(2x) - 1 + x \sin(2x)] / (4x^3)$  от  $x = \delta_0 \zeta$ , описывающая зависимость среднего изменения энергии электронов от их начальной энергии.

При положительных отклонениях частицы, в среднем, теряют энергию, а при отрицательных – приобретают. Иными словами, «водоворот» фазовой жидкости, изображенный на Рис. 30, слегка «затягивает» частицы, находящиеся выше и ниже сепаратрисы<sup>29</sup>. Чтобы получить максимальный отбор энергии от частиц надо выбрать начальное отклонение энергии, соответствующее минимуму функции (63),  $\delta_0 = 1,3/\zeta$ . При этом

$$\langle \delta - \delta_0 \rangle_{\min} = -0,135 A^2 \zeta^3. \quad (67)$$

<sup>29</sup> Так как мы считаем безразмерную амплитуду электромагнитной волны  $A$  малой, то высота сепаратрисы  $\delta_{\max} = \sqrt{2}A$  мала по сравнению с  $\delta_0$ .

Такая зависимость от амплитуды волны и длины ондулятора почти очевидна. Действительно, сначала происходит модуляция энергии частиц, пропорциональная амплитуде волны и длине (можно считать, что это происходит в первой половине ондулятора). Затем частицы с большей энергией догоняют частицы с меньшей энергией, причем результирующая модуляция продольной плотности пропорциональна модуляции энергии и длине, т. е.  $A\zeta^2$ . Во второй половине ондулятора уплотнения замедляются, а разрежения ускоряются пропорционально  $A\zeta$ , как и при модуляции энергии в первой половине. Среднее уменьшение энергии электронов пропорционально модуляции плотности и модуляции энергии во второй половине ондулятора.

Если ток электронного пучка, пролетающего через ондулятор,  $I$ , т. е. через ондулятор проходит  $I/e$  электронов в секунду, то пучок отдает волне мощность

$$P = -\frac{I}{e} \gamma m c^2 \langle \delta - \delta_0 \rangle_{\min} = 0,135(4\pi)^2 \lambda^2 K^2 \frac{I}{I_0} \gamma N^3 c \frac{E^2}{8\pi}, \quad (68)$$

пропорциональную интенсивности внешней волны  $cE^2/(8\pi)$ . Константа  $I_0 = mc^3/e \approx 17000A$  называется Альфвеновским током. Если волна имеет вид светового пучка с площадью поперечного сечения  $S$ , то ее мощность равна  $P_{\text{вх}} = cE^2S/(8\pi)$ . Пусть электронный пучок летит внутри светового. Тогда усиление мощности световой волны в ондуляторе можно описать так называемым усилением слабого сигнала

$$G = \frac{P_{\text{вых}} - P_{\text{вх}}}{P_{\text{вх}}} = \frac{P8\pi}{cE^2S} \approx 20K^2 \frac{\lambda^2}{S} \frac{I}{I_0} \gamma N^3. \quad (69)$$

Заметим, что это выражение правильно только при слабом усилении  $G \ll 1$ , так как при его выводе мы предполагали, что амплитуда волны  $A$  не меняется.

Описанный выше усилитель электромагнитного излучения называется лазером на свободных электронах (ЛСЭ). Название можно объяснить тем, что в других типах лазеров используется излучение связанных электронов, т. е. электронов привязанных к своим атомам или кристаллу (в полупроводниковых лазерах). Конечно, в ЛСЭ электроны тоже не совсем свободны. Чтобы эффективно взаимодействовать с электромагнитной волной (излучать) они движутся в магнитном поле по непрямолинейной траектории (значит, с ускорением). Общей чертой всех лазеров является использование явления вынужденного излучения, т. е. «правильной» синхронизации отдельных излучателей усиливаемой волной. В ЛСЭ эта синхронизация происходит за счет продольной группировки электронов.

«Родственники» ЛСЭ в более длинноволновом (сантиметровом) диапазоне – это лампы бегущей волны (ЛБВ), появившиеся на полвека раньше. В них электроны и правда «свободны». Двигаясь вдоль прямой они взаимодействуют с медленной продольной электромагнитной волной. Последняя может быть сформирована, например, в полном металлическом цилиндре, частично заполненном диэлектриком (см. Рис. 32).

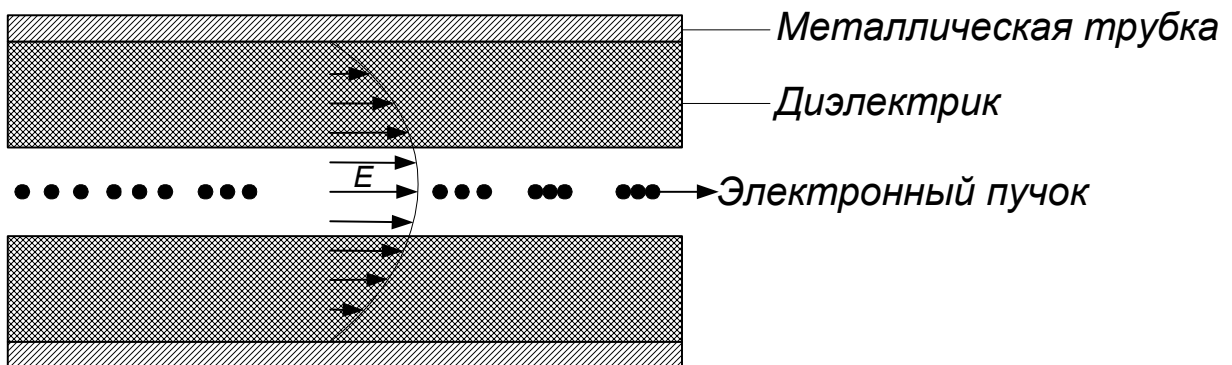


Рис. 32. Схема лампы бегущей волны с диэлектрическим заполнением волновода.

Электрическое поле такой волны продольно и меняет энергию электронов и без ондулятора. Диэлектрик снижает фазовую скорость волны до скорости электронов (т. е. в ЛБВ тоже выполняется условие синхронизма). Как и в ЛСЭ в ЛБВ происходит продольная группировка. Можно сказать, что ЛБВ отличается от ЛСЭ только типом используемого излучения. В ЛСЭ это ондуляторное излучение, а в ЛБВ – Черенковское<sup>30</sup>.

Посмотрим теперь на наше физическое явление с более общей точки зрения. Некоторая система поглощает мощность  $-P$  из волны (или добавляет в нее мощность  $P$ ). Тогда можно определить величину сечения поглощения (или сечения вынужденного излучения, если сечение поглощения окажется отрицательным, как в интересующем нас случае) как отношение поглощаемой мощности к интенсивности падающей волны

$$\sigma = \frac{-P}{cE^2} 8\pi.$$

Такое определение аналогично уже использованному выше определению сечения рассеяния волны (см. формулу (42) для Томсоновского сечения). Усиление слабого сигнала (69) просто выражается через сечение поглощения:  $G = -\sigma/S$ . Если бы наш ЛСЭ поглощал излучение (например, при  $\delta_0 < 0$ ), то поглощаемая мощность была бы такой же, как для непрозрачного экрана площадью  $\sigma$ <sup>31</sup>.

## Простейший ЛСЭ-генератор

Для получения максимального усиления надо минимизировать площадь светового пучка  $S$ . Это видно из формулы (69) и довольно естественно, так как, уменьшая площадь при заданной мощности световой волны, мы увеличиваем интенсивность, и, следовательно, амплитуду волны, взаимодействующей с электроном. При этом можно отобрать у электрона больше энергии. Однако в пустом пространстве имеется предел для уменьшения площади светового пучка на длине ондулятора  $L = N\lambda_w$ , связанный с дифракцией света. Для его оценки рассмотрим прохождение волны через круглое отверстие диаметром  $d$ . Как гласит принцип Гюйгенса, каждая точка волнового фронта является источником вторичной сферической волны, и результирующее поле волны есть сумма этих вторичных волн. Применяя это утверждение к нашей задаче, видим (см. Рис. 33), что для направлений с углами к оси, превышающими  $\lambda/d$ , фазы вторичных волн от разных частей отверстия сильно различаются.

<sup>30</sup> Черенковским излучением называется излучение заряженной частицы, летящей в прозрачной среде со скоростью, превышающей фазовую скорость электромагнитной волны  $c/n$ , где  $n$  – показатель преломления среды.

<sup>31</sup> На самом деле, с учетом дифракции сечение рассеяния коротковолнового излучения на большом (по сравнению с длиной волны) непрозрачном объекте в два раза больше его геометрического сечения. Поэтому вместо  $\sigma$  надо было бы написать  $\sigma/2$ .

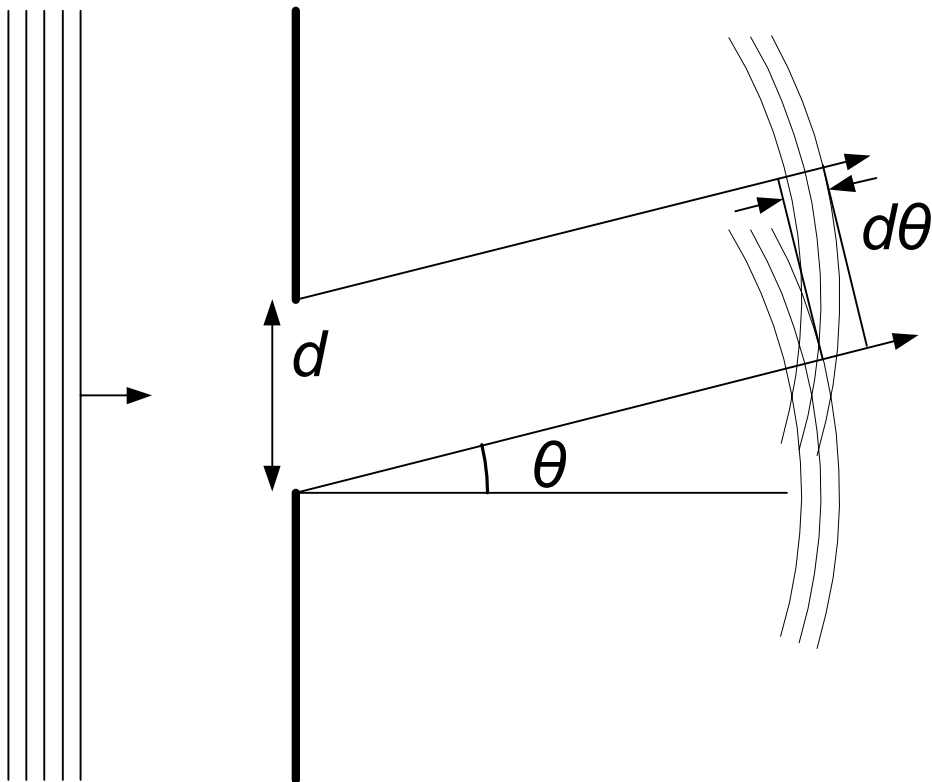


Рис. 33. Дифракция плоской волны на отверстии в экране. При достаточно больших углах дифракции задержка вторичных волн от разных точек отверстия может быть сравнима с длиной волны. В этом случае суммарная амплитуда волны, рассеянной на данный угол, будет гораздо меньше, чем для рассеяния вперед.

В результате интенсивность излучения в этих направлениях значительно меньше, чем на оси. Тогда на расстоянии  $L$  от экрана минимальный радиус светового пятна будет примерно  $\lambda L/d$ . Если мы потребуем, чтобы световой пучок мог пройти через второе отверстие с диаметром  $d$ , расположенное на расстоянии  $L$  от первого отверстия, то  $\lambda L/d < d/2$ . Отсюда  $d^2/2 > \lambda L$ , и, значит  $S_{min} \approx \lambda L$ <sup>32</sup>. С учетом этого получаем простой результат

$$G_{max} \approx 21 \frac{K^2}{2 + K^2} \frac{I}{\mathcal{H}_0} N^2. \quad (70)$$

Если заставить свет многократно проходить через вышеописанный ЛСЭ-усилитель, то за много проходов мощность света может усиливаться на несколько порядков. Простейший способ сделать это – поставить два зеркала – до и после ЛСЭ-усилителя, как это показано на Рис. 34. Такую пару зеркал часто называют оптическим резонатором, так как время затухания электромагнитной волны (света)  $-2L_p/[c \ln(\rho_1 \rho_2)]$  ( $L_p$  – расстояние между зеркалами, а  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , - коэффициенты отражения зеркал) в пространстве между зеркалами гораздо больше периода волны  $2\pi/\omega$ . Последнее свойство напоминает высокочастотный колебательный контур или любой другой осциллятор со слабым затуханием. Условие нарастания мощности имеет простой вид

$$(1 + G)\rho_1 \rho_2 > 1, \quad (71)$$

т. е. усиление в ЛСЭ должно превышать потери в зеркалах. Если условие (71) выполнено, то после «включения» электронного пучка мощность растет с временем нарастания в  $e = 2,72$  раз  $2L_p/[c \ln[(1 + G)\rho_1 \rho_2]] \approx 2L_p/[c(G + \rho_1 + \rho_2 - 2)]$  (приближенное равенство записано

<sup>32</sup> Эти оценки можно провести гораздо точнее, если считать, что пропускание экрана зависит от координат на экране не как ступенчатая функция, а по Гауссовой экспоненте  $\exp[-(x^2 + y^2)/a^2]$ . Тогда прошедшая волна описывается довольно простой зависимостью от координат. Такие приближенные решения волнового уравнения называются Гауссовыми волновыми пучками и широко используются в прикладной оптике.

с учетом  $1 - \rho \ll 1$ , что следует из (71) и  $G \ll 1$ ). Условие (71) называют условием генерации, или самовозбуждения. Оно хорошо известно в радиотехнике, где описывает усилитель, у которого часть (в нашем случае  $\rho_1\rho_2$ ) выходного сигнала подается на вход усилителя. Это называется усилителем с положительной обратной связью. Можно сказать, что в ЛСЭ-генераторе пара зеркал обеспечивает положительную обратную связь.

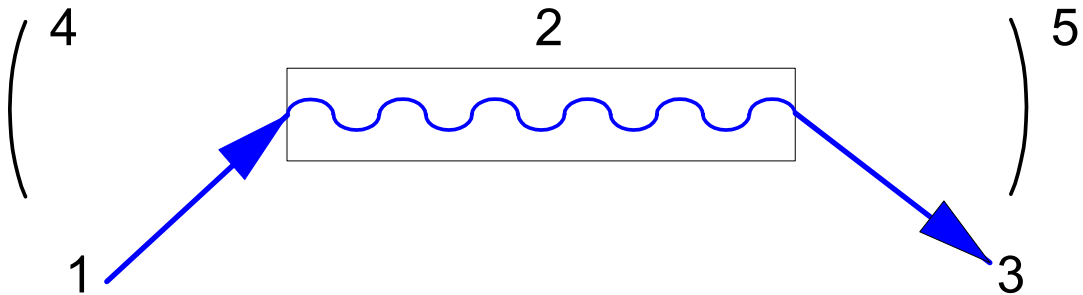


Рис. 34. Схема ЛСЭ-генератора. 1 – входящий электронный пучок, 2 – ондулятор, 3 – отработанные электроны, 4 и 5 – зеркала. Для компенсации дифракционной расходимости излучения зеркала часто делают вогнутыми с радиусом кривизны, лежащим в пределах от половины расстояния между зеркалами до полной величины этого расстояния.

## ЛСЭ в сопровождающей системе отсчета

Выше мы обсудили механизм усиления волны в ЛСЭ, или явление вынужденного ондуляторного излучения. Интересно рассмотреть то же явление в сопровождающей системе отсчета, где начальная средняя скорость электронов равна нулю. Для этого мы вернемся к картинке, представленной на Рис. 22, где на покоящийся электрон справа со скоростью  $v$  налетает поле ондулятора с пространственным периодом  $\lambda_w/\gamma$  и амплитудой горизонтального электрического поля  $E_x \beta\gamma B_0$ , «трясущее» электрон в горизонтальном направлении  $x$ . Теперь слева на электрон налетает еще и усиливаемая электромагнитная волна с горизонтальным электрическим полем малой амплитуды  $(1-\beta)\gamma E$  и длиной волны  $\lambda/[(1-\beta)\gamma]$ . Из рассмотрения движения электрона в лабораторной системе мы знаем, что электроны группируются, сдвигаясь вдоль оси  $z$ . Чтобы описать то же явление в сопровождающей системе нам надо найти продольную силу, которая сдвигает электроны. Вспоминая выражение для силы Лоренца (22), легко заключить, что продольная компонента силы равна  $e v_x B_y/c$ . Считая для простоты движение электрона нерелятивистским (это правильно при  $K \ll 1$ ), можем записать уравнение движения вдоль  $x$

$$m \frac{d}{dt} v_x \approx e E_x. \quad (72)$$

Из этого уравнения видно, что в поле одной волны колебания скорости сдвинуты на  $\pi/2$  относительно колебаний поля ( $E_x$  и  $B_y$ ). Следовательно, среднее по времени значение продольной силы равно нулю. Итак, для появления продольной силы нужна вторая волна. Подставляя в (72)  $E_x = \beta\gamma B_0 \cos[\gamma k_w(z+vt)] - (1-\beta)\gamma E \cos[(1-\beta)\gamma k(z-ct)]$ , получим

$$v_x = cK \sin[\gamma k_w(z+vt)] + \frac{eE}{mck} \sin[(1-\beta)\gamma k(z-ct)], \quad (73)$$

откуда

$$\overline{F_z} = \frac{e}{c} \overline{v_x B_y} = -\frac{eK\gamma E}{2} \left(1 - \beta + \frac{k_w}{k}\right) \sin[(\gamma k_w + (1 - \beta)\gamma k)z + (\gamma k_w v - (1 - \beta)\gamma kc)t]. \quad (74)$$

Если частоты двух волн равны

$$k_w v = (1 - \beta)kc, \quad (75)$$

то мы снова придем к условиям синхронизма (52) и (53), а средняя продольная сила не зависит от времени и имеет простой вид

$$\overline{F_z} = -\frac{eEK}{2\beta\gamma} \sin[(1 + \beta)\gamma k_w z]. \quad (76)$$

Уравнение продольного движения  $dp_z/dt = \overline{F_z}$  опять приводятся к уравнениям движения математического маятника. При этом  $\varphi = (1 + \beta)\gamma k_w z \approx 2\gamma k_w z$  - та же самая фаза, которую мы использовали в уравнении (54) движения в лабораторной системе отсчета. Действительно, фаза - это скалярное произведение четырехвекторов  $(\omega, \mathbf{k})$  и  $(t, \mathbf{r})$ , которое по определению не меняется при преобразованиях Лоренца. Применяя преобразование Лоренца к четырехвектору энергии-импульса  $(mc^2, 0, 0, p_z)$ , получим  $E = \gamma(mc^2 + vp_z)$ . Отсюда следует, что относительное отклонение энергии в лабораторной системе от синхронной примерно равно продольной скорости в сопровождающей системе, деленной на скорость света  $\delta = vp_z/(mc^2)$ . С учетом этих соображений получим уравнения продольного движения в сопровождающей системе отсчета

$$\frac{d}{dt} \delta = -\frac{eEK}{2\gamma mc} \sin \varphi \quad (54')$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \gamma k_w c \delta. \quad (55')$$

Из преобразования Лоренца следует, что  $z_{lab} = \gamma vt$ . Поэтому  $\zeta = k_w \gamma vt$  и мы снова получаем (в ультрарелятивистском случае,  $\beta \rightarrow 1$ ) систему (54), (55).

Мы уже анализировали движение частиц, подчиняющихся уравнению математического маятника. Поэтому мы можем сразу сказать, что, если частицы были первоначально равномерно распределены в пространстве, то вблизи  $\varphi = 2\pi n$ , т. е. при  $z = n\lambda_w/(2\gamma)$ , со временем появляются слои с увеличенной плотностью электронов. Обратим внимание на то, что слои расположены с периодом, приблизительно в два раза меньшим, чем длина волны электромагнитных волн. В сопровождающей системе группировка происходит на половинной длине волны. Из выражения для горизонтальной скорости (73) легко получить соответствующую среднюю кинетическую энергию колебаний по  $x$

$$\overline{T} = \frac{mv_x^2}{2} \approx mc^2 \frac{K^2}{4} - \frac{eEK(1 - \beta)}{2k_w \beta} \cos[(1 + \beta)\gamma k_w z]. \quad (77)$$

Малая добавка (второй член) к кинетической энергии тоже имеет период  $\lambda_w/(2\gamma)$ , причем уплотнения находятся в минимумах кинетической энергии. Более того, сравнив (76) и (77), легко проверить, что

$$\overline{F_z} = -\frac{d}{dz} \overline{T}. \quad (78)$$

Таким образом, средняя кинетическая энергия служит эффективной потенциальной энергией для медленного (усредненного по быстрым колебаниям) движения. Этот «простой» результат был впервые сформулирован П. Л. Капицей<sup>33</sup>. Объяснить его можно

<sup>33</sup> Простая формула (78) работает не для всех быстроосциллирующих сил. Поэтому ее применимость надо доказывать для каждого класса задач. Для электромагнитного поля она справедлива. Усредненные по

следующим образом. Пусть мы переместили электрон из одного места в другое, совершив работу по преодолению усредненной силы. Куда девалась энергия? Она перешла (в среднем по времени) в увеличившуюся кинетическую энергию быстрых колебаний. То, что частицы собираются в минимумах эффективной потенциальной энергии выглядит вполне естественно.

Итак, мы объяснили группировку электронов в сопровождающей системе. Теперь мы посмотрим, как сильная волна (поле ондулятора) отражается от получившейся слоистой среды. Рассмотрим сначала две почти прозрачных отражающих плоскости, на которые нормально падает волна с волновым вектором  $k = 2\pi/\lambda$ . Если расстояние между плоскостями  $d$ , то поле отраженной волны будет пропорционально  $\cos(kz - \omega t) + \cos(kz - \omega t + 2kd)$ . Отражение максимально при  $d = q\lambda/2$  ( $q$  – целое число). То же самое условие обеспечивает максимум отражения от большого количества отражающих слоев, разнесенных на расстояние  $d$ . Слоистые отражающие среды широко используются в технике. Например, отражающие слои могут быть образованы атомами в кристаллах. В этом случае межплоскостные расстояния порядка  $10^{-10}$  м, и кристаллы хорошо отражают излучение с такими длинами волн, т. е. рентгеновское излучение. При этом отражаются не все длины волн, а только те, для которых точно выполняется условие конструктивной интерференции (для рентгеновского диапазона оно называется Брэгговским). Поэтому кристаллы используются для создания рентгеновских монохроматоров. Для видимого света с длиной волны порядка  $10^{-6}$  м слоистые среды с нужным периодом создаются чередованием напыления слоев с разным показателем преломления (например, кварца и окиси циркония). Так делаются зеркала с близким к единице (0,9999) коэффициентом отражения.

Возвращаясь к рассмотрению ЛСЭ в сопровождающей системе отсчета, видим, что электроны, сгруппированные с периодом, равным половине длины волны, эффективно отражают поле ондулятора в положительном направлении оси  $z$ . Это отраженное поле складывается с полем усиливаемой волны. В этом и состоит механизм усиления. Естественно, что и в сопровождающей системе можно написать явные формулы для изменения энергии частиц или поля излучения и получить уже известные нам ответы. Мы не будем этого делать, а качественно рассмотрим случай длинного ондулятора и большого усиления.

Как уже отмечалось, начальная волна, распространяющаяся в положительном направлении вдоль оси  $z$ , усиливается за счет отражения поля ондулятора от уплотнений электронов. Тогда продольная сила, группирующая электроны, возрастает. Модуляция электронной плотности, а, значит, коэффициент отражения, увеличиваются. Происходит дальнейший рост амплитуды усиливаемой волны. В результате амплитуда усиливаемой волны и модуляция плотности электронов растут со временем. В физике плазмы такой процесс называется вынужденным Рамановским рассеянием. При этом иногда говорят, что сильная электромагнитная волна ( $\omega_0, \mathbf{k}_0$ ) распадается на обратную электромагнитную волну ( $\omega_1, \mathbf{k}_1$ ) и электронную плазменную волну ( $\omega_2, \mathbf{k}_2$ ). Для такого распада необходимо выполнение условий синхронизма (резонанса) этих волн

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + \omega_2 \\ \mathbf{k}_0 &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (79)$$

Если правые и левые части равенств (79) домножить на постоянную Планка  $\hbar$ , то они превратятся в законы сохранения энергии и импульса для фотона сильной волны, распадающегося на фотон и плазмон. В рассматриваемом нами случае ЛСЭ мы не учитываем взаимного расталкивания электронов (что правильно при их малой плотности), поэтому частота плазменных колебаний стремится к нулю, и  $\omega_0 = \omega_1$ . Тогда  $k_1 = \omega_1/c$  и

---

времени силы, вызванные неоднородностью быстроосциллирующего электромагнитного поля, пропорциональные градиенту средней кинетической энергии, называются силами Миллера.

$k_2 = |\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1| = \omega_0/v + \omega_0/c = \gamma k_w (1 + \beta)$ , что совпадает с ранее полученным волновым вектором группирующей силы (76).

### Как это делается в ИЯФ

В ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН работы по ЛСЭ ведутся с 1976 года. В 1979 году на накопителе ВЭПП-3 были проведены первые эксперименты с предложенной А. Н. Скринским и Н. А. Винокуровым модификацией ЛСЭ – оптическим клистроном (ОК). Теперь все работающие в мире ЛСЭ на электронных накопителях сделаны по схеме ОК, что связано с существенно большим усилением ОК по сравнению с обычным ЛСЭ. Ондулятор первого ОК был первым в мире ондулятором на постоянных магнитах с регулировкой амплитуды магнитного поля при помощи изменения рабочего зазора. Во второй версии ОК (см. Рис. 35), сделанной в 1982 году, были впервые в мире применены гибридные (с железными полюсами) ондуляторы на постоянных магнитах, предложенные и сделанные в ИЯФ. Как переменный зазор, так и гибридная конструкция ондуляторов стали сейчас общепринятыми и применяются на всех источниках синхротронного излучения.

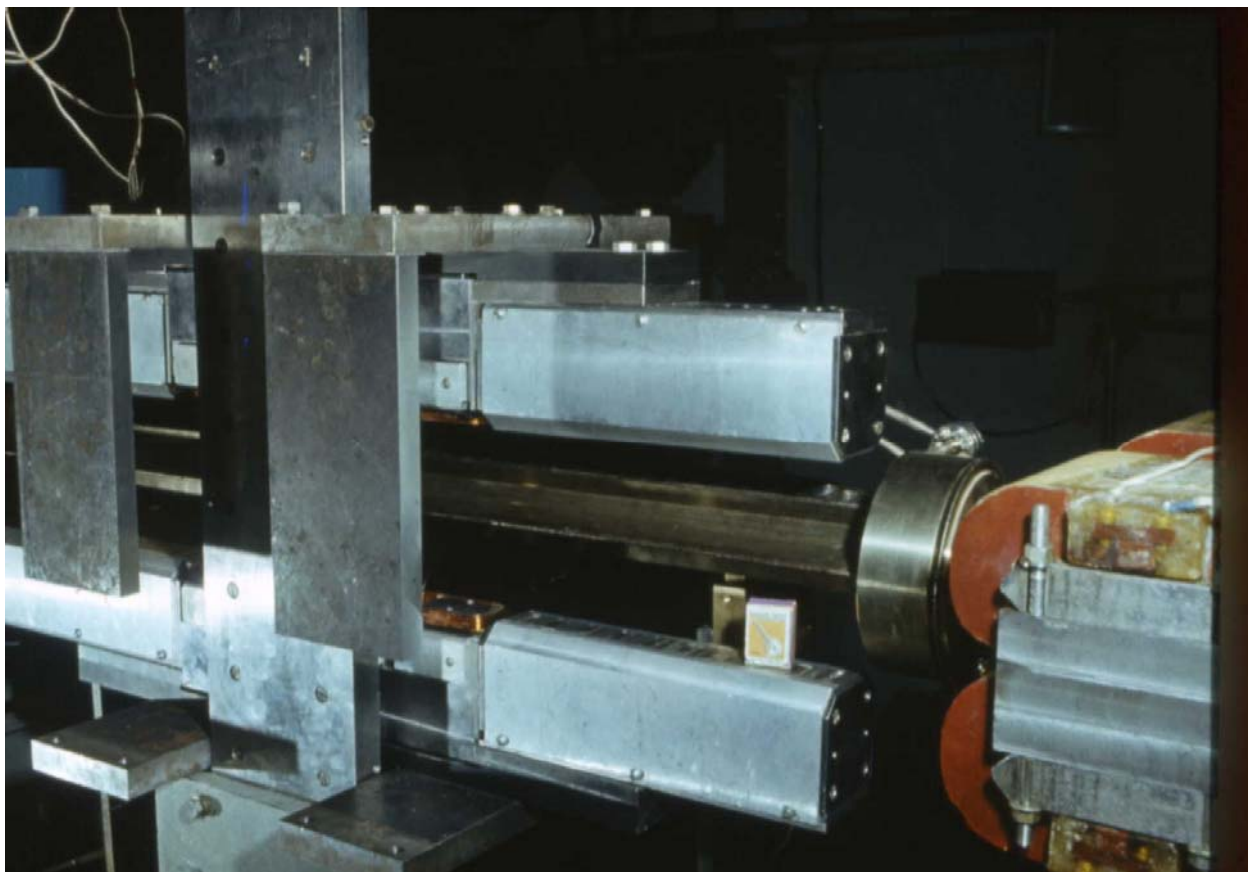


Рис. 35. Магнитная система ОК. Работала на электронном накопителе ВЭПП-3 с 1982 г. В середине – трехполюсный вигглер-группирователь, слева и справа – два ондулятора. Ондуляторы - первые в мире гибридные ондуляторы на постоянных магнитах.

В 1988 г. заработал новый ЛСЭ ОК-4, установленный на байпасе (специально сделанном дополнительном прямолинейном промежутке) накопителя ВЭПП-3. Применение байпаса дало возможность установить на накопитель очень длинный (7.5 м) ЛСЭ. Такой длинный ондулятор обеспечил усиление, достаточное для получения

рекордно короткой длины волны 0.24 микрона (ультрафиолетовое излучение), рекордно узкого ( $3 \times 10^{-6}$ ) спектра, а также продемонстрировать режим синхронизации поперечных мод конфокального резонатора. На этой же установке была экспериментально проверена когерентность спонтанного излучения из двух последовательно установленных ондуляторов, разделенных ахроматическим поворотом. Последние эксперименты важны для создания т. н. электронного вывода излучения, решающего проблему вывода излучения из оптического резонатора мощного ЛСЭ.

Благодаря высокой яркости излучения из длинного ондулятора удалось провести цикл уникальных экспериментов по изучению влияния квантовых флуктуаций на движение одного электрона, циркулирующего в накопителе. Было показано, что движение электрона (см. Рис. 36) таково, как если бы он подвергался действию случайной силы, описываемой квазиклассической теорией квантовых флуктуаций синхротронного излучения. Траектория, показанная на рисунке, похожа на траекторию малой частицы в жидкости. Однако природа этих случайных движений различна. Траектория Броуновского движения не является «истинно случайной», т. к. в принципе, зная начальные скорости молекул жидкости, можно рассчитать как движение этих молекул, так и движение частицы под их ударами. «Случайность» Броуновского движения связана с нашим незнанием начальных условий. В случае движения электрона все начальные условия известны (все осцилляторы поля находятся в основном состоянии), но движение электрона принципиально непредсказуемо. Таким образом, проведенные эксперименты дают один из немногих примеров истинно случайного процесса.

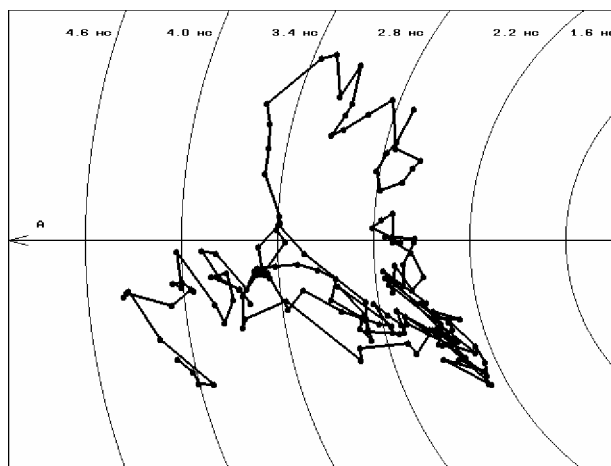


Рис. 36. Небольшой участок измеренной траектории электрона на продольной фазовой плоскости.

Электронный к. п. д. ЛСЭ (отношение мощности, передаваемой в излучение, к мощности электронного пучка) довольно низок (обычно, не более процента). Это связано с нарушением условия синхронизма для замедленных электронов. Для ЛСЭ на накопителях работает еще более жесткое ограничение выходной мощности, связанное с многократным взаимодействием электронов с волной. Поэтому для создания мощных ЛСЭ требуется применение особого класса электронных ускорителей – высокочастотных ускорителей рекуператоров (УР). В УР электроны сначала ускоряются в высокочастотных резонаторах, затем используются в ЛСЭ (или для других целей), а после этого замедляются в тех же высокочастотных резонаторах, возвращая мощность, затраченную на ускорение. Применение УР позволяет получать большие средние токи электронов и существенно снижает радиационную опасность установки.

В настоящее время в ИЯФ ведется строительство мощного ЛСЭ. В основе своей полномасштабный мощный лазер на свободных электронах будет иметь четырехдорожечный (УР) с максимальной энергией 40 МэВ. Ожидаемый диапазон длин волн излучения полномасштабного ЛСЭ - от 5 до 240 микрон.

Ускоритель-рекуператор (УР) первой очереди ЛСЭ включает в себя полную высокочастотную систему (все резонаторы и генераторы) и также инжектор вместе с впускным каналом, но, в отличие от полномасштабного варианта, имеет только одну орбиту. Эта машина запущена в действие в апреле 2003 г. На Рис. 37 показана схема ЛСЭ первой очереди.

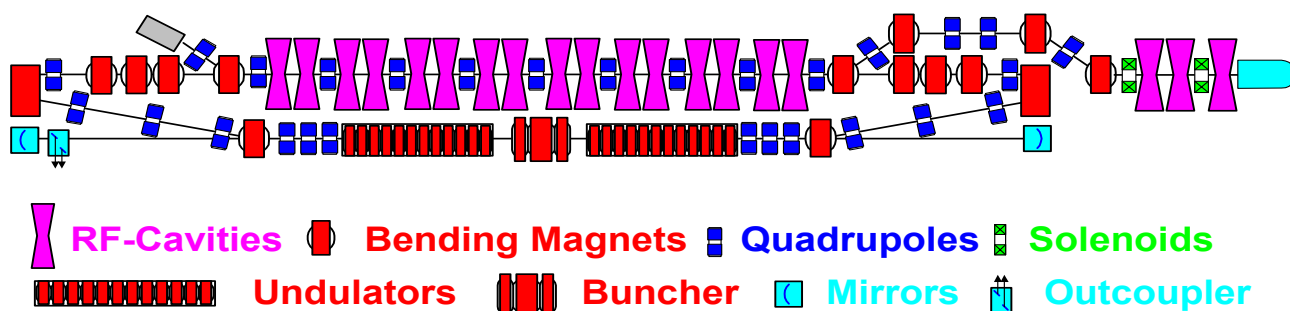


Рис. 37. Схема первой очереди Новосибирского мощного лазера на свободных электронах.

Пучок электронов из инжектора с энергией 2 МэВ в основной ускоряющей структуре набирает энергию 12 МэВ и попадает в ондулятор, где отдает часть своей энергии в излучение. После этого пучок, возвращаясь в основную ускоряющую структуру в замедляющей фазе, теряет энергию практически до энергии инжекции и сбрасывается в поглотитель. Основные параметры УР и собственно ЛСЭ представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Параметры ускорителя ЛСЭ первой очереди.

Длина волны ВЧ, м	1.66
Количество ВЧ резонаторов	16
Амплитуда ускоряющего напряжения на одном резонаторе, МВ	0.7
Энергия инжекции, МэВ	2
Максимальная энергия электронов, МэВ	12
Частота следования сгустков, МГц	2.8 – 11.2
Средний ток, мА	2 – 20
Нормализованный эмиттанс пучка, мм·мрад	30 π
Энергетический разброс в ЛСЭ, %	0.3
Длина электронного сгуска в ЛСЭ, нс	0.1
Пиковый ток в ЛСЭ, А	20

Таблица 2. Параметры ЛСЭ первой очереди

Ондулятор:

Длина, м	4
Период, мм	120

Количество периодов	2×32
Параметр ондуляторности	0 – 1
Резонатор:	
Длина, м	26.6
Радиус кривизны зеркал, м	15
Диаметр выходного отверстия, мм	8
Излучение:	
Длина волны, мм	0.12 – 0.24
Длительность импульса, пс	70
Частота следования импульсов, МГц	2.8 - 11.2
Средняя мощность, Вт	до 400
Минимальная относительная ширина линии	$3 \cdot 10^{-3}$



Рис. 38. Фотография первой очереди ЛСЭ.

В магнитной системе ЛСЭ использованы два одинаковых ондулятора, включенные последовательно, и трехполюсный вигглер для подстройки фазы. Максимальная мощность ЛСЭ достигается при среднем токе до 20 мА, что соответствует частоте

следования электронных сгустков 11.2 МГц. Такой режим работы ЛСЭ соответствует двум световым сгусткам в оптическом резонаторе.

Излучение ЛСЭ по заполненному сухим азотом каналу выводится в помещение для пользователей, где разводится по экспериментальным станциям (Рис. 39). На станциях работают сотрудники нескольких институтов РАН.



Рис. 39. Помещение для пользователей с экспериментальными станциями.

Для продвижения в более высокочастотную область создается вторая очередь ЛСЭ. Полномасштабный УР использует ту же ускоряющую высокочастотную структуру, что и УР первой очереди, но расположен, в отличие от последнего, в горизонтальной плоскости (см. Рис. 40). Таким образом, не требуется демонтаж одного для постройки другого. Выбор режима работы осуществляется простым переключением поворотных магнитов. Полномасштабный УР построен по схеме разрезного микротрона, причем рекуперация энергии электронного пучка происходит по той же схеме, что и ускорение, но фазы пролета ускоряющей структуры отображаются зеркально. Основные проектные параметры полномасштабного УР следующие:

Энергия инъекции полная, МэВ	2;
Максимальная энергия пучка, МэВ	40;
Максимальная частота повторения, МГц	90;
Максимальный средний ток пучка, мА	150.

На последнюю (40 МэВ) дорожку УР планируется установить мощный ЛСЭ инфракрасного диапазона в области длин волн 5 – 30 мкм, а на вторую дорожку (байпас) еще один ЛСЭ с диапазоном 30 – 100 мкм. Ожидаемая средняя мощность каждого ЛСЭ – около 10 кВт.

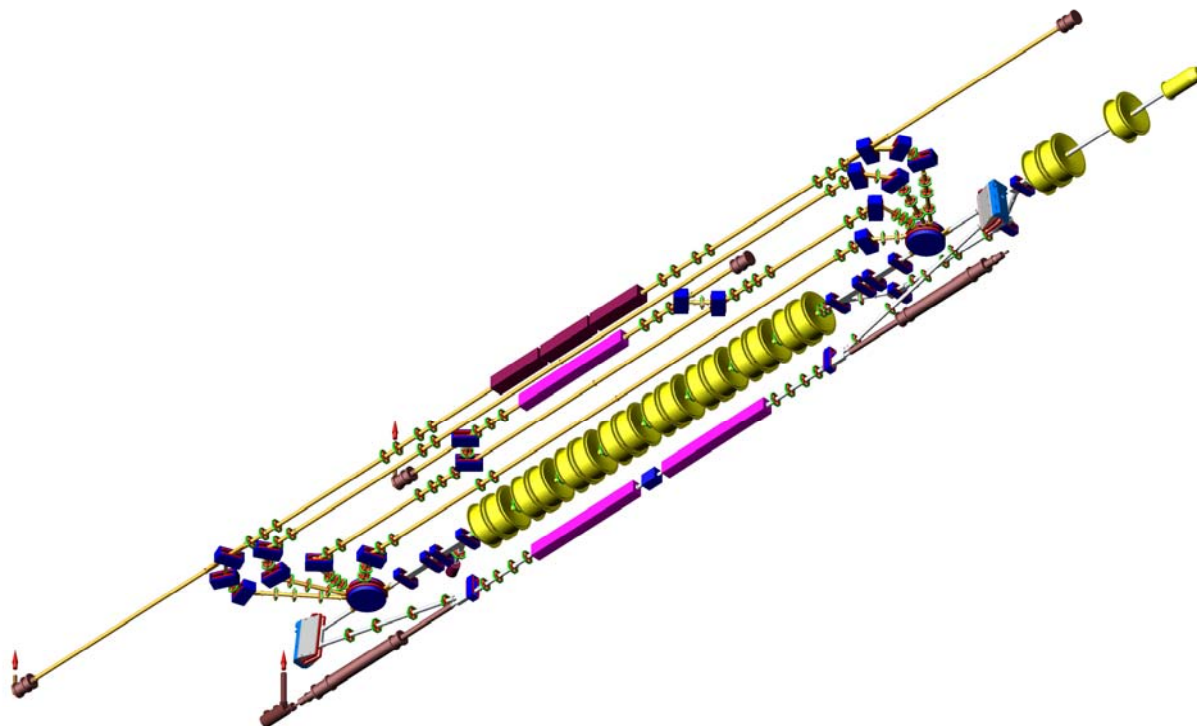


Рис. 40. Общий вид магнитной системы ускорителя-рекуператора второй очереди (вид снизу).

## Заключение

Наше обсуждение принципов работы ЛСЭ было по необходимости кратким. Незатронутыми остались как «физические» вопросы о предельной мощности и спектре излучения ЛСЭ и влиянии неидеальности электронного пучка (т. е. ненулевых разбросов электронов по продольной и поперечным скоростям) и поперечной неоднородности магнитного поля ондулятора, так и «технические» - о том, какие бывают ондуляторы и как они устроены, какие ускорители могут обеспечить параметры пучка, необходимые для ЛСЭ и т. д. Тема использования ЛСЭ для решения научных и практических задач еще дальше выходит за рамки этой статьи.

# Undulators

J. Pflueger and N. Vinokurov

## 1. Introduction

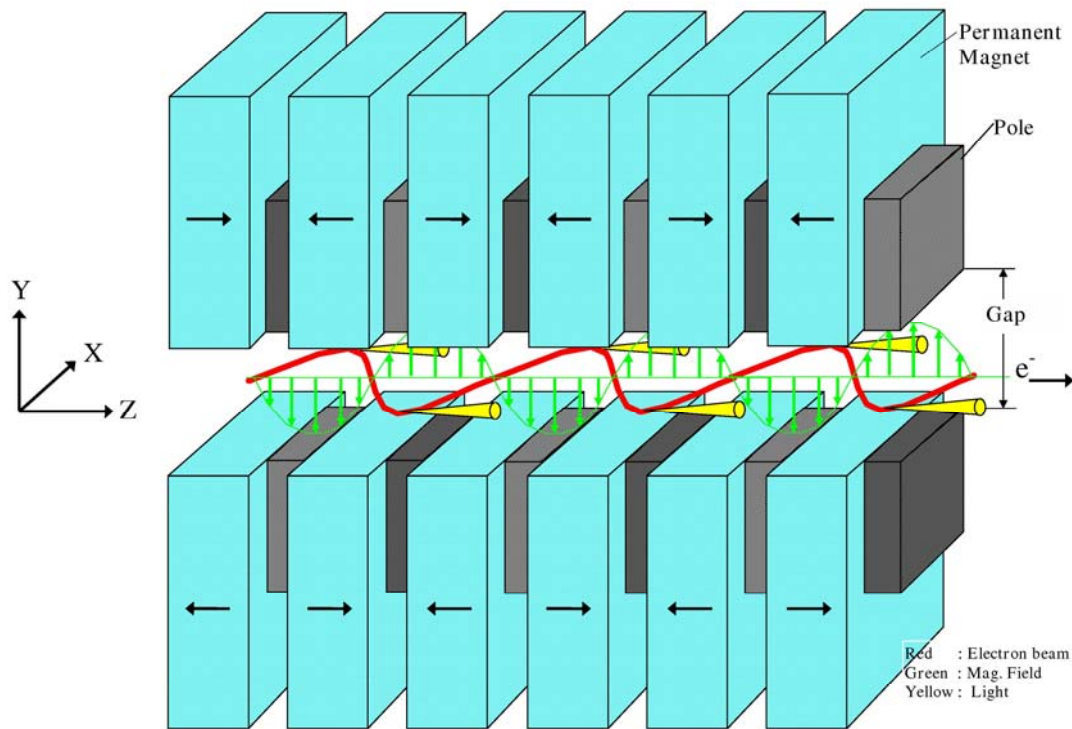


Fig. 1 Schematic of electron motion in an undulator

Since the late 1970's undulators became increasingly important as new and intense radiation sources in storage rings. With the development of FELs undulators were also needed for these applications. Meanwhile SASE FELs were developed and are operational using undulator systems with lengths up to 30m. As a next step X-FELs using the SASE principle were proposed. The LCLS project at Stanford is the first, which has been approved. A much larger facility, the European X-ray Laser laboratory is being planned at DESY in Hamburg. For these X-ray lasers the undulator systems are needed with lengths up to 200m.

In an FEL the undulator plays a central role. It provides the periodic magnetic field for the electron beam so that the FEL process can take place. An undulator is a magnetic system designed in such a way that electrons injected on the axis oscillate or 'wiggle' along a straight line. This is shown schematically in Fig.1 Here also the convention for the coordinate system used in this contribution is shown.

## 2. Basic Properties

In general electrons obey the Lorentz equation:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{\gamma \cdot mc} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

Here  $\vec{v}$  is the electron's velocity vector,  $\vec{B}$  the magnetic field,  $e$  its charge,  $m$  its mass and  $\gamma$  the Lorentz factor, which describes its kinetic energy in units of its rest mass.

$B_x$ ,  $B_y$ , the two transversal field components play the important role, which enter into the equation (2.1). For simplicity the fields are assumed to be purely sinusoidal, containing only one harmonic. At the  $z$ -axis in a planar undulator it is given by:

$$B_x = 0; B_y = B_0 \cos(kz), B_z = 0. \quad (2.2a)$$

In contrast in a helical undulator it is given by:

$$B_x = -B_0 \sin(kz), B_y = B_0 \cos(kz), B_z = 0. \quad (2.2b)$$

Here  $B_0$  is the peak field,  $k=2\pi/\lambda_0$ , and  $\lambda_0$  is the period length. For the majority of applications  $B_0 \leq 2T$  and  $\lambda_0$  is in the range of 1 to 30 cm. However there might be exceptions.

For large  $\gamma$  and very small deflection angles in the order of mrad  $z \approx ct$  can be assumed and in the paraxial approximation the particle trajectory is then approximated by:

$$\frac{d^2x}{dz^2} \approx -\frac{e}{p} B_y, \quad \frac{d^2y}{dz^2} \approx \frac{e}{p} B_x, \quad (2.3)$$

where  $p = \gamma m c$  is the electron momentum. For a sinusoidal field Eq. (2.3) can be solved:

$$x' = \frac{dx}{dz} = -\frac{K}{\gamma} \sin(kz) + C_1 \quad ; \quad K = \frac{e \cdot B_0 \lambda_0}{m \cdot c^2 \cdot 2 \cdot \pi} \quad (2.4a)$$

$$x = a \cdot \cos(kz) + C_1 z + C_2 \quad ; \quad a = \frac{K \cdot \lambda_0}{\gamma \cdot 2 \cdot \pi} \quad (2.4b)$$

For a particle, moving along the undulator axis ( $z$ ),  $C_1 = C_2 = 0$ . For the  $y$  coordinate there is an analogous calculus. The dimensionless  $K$  parameter plays an important role for characterizing an undulator. The amplitude of oscillation is given by  $a$ . For a sinusoidal field the maximum deflection angle is given by  $\Theta_{Max} = K/\gamma$ . For  $K=1.17$  and  $\gamma=2000$  (VUV-FEL at DESY)  $\Theta_{Max} = 0.58$  mrad and  $a$  is  $2.5 \mu\text{m}$ .

## 3. Magnetic Field Properties

Normal conducting Electro Magnet (EM), Permanent Magnet (PM) and Superconducting (SC) technology have been used to for the construction of undulators. A comparison and evaluation of the potential of these technologies can be found in /1/. Nowadays, apart from rare exceptions, PM technology is used exclusively for the design of insertion devices for storage rings as well as for undulator systems for FELs.

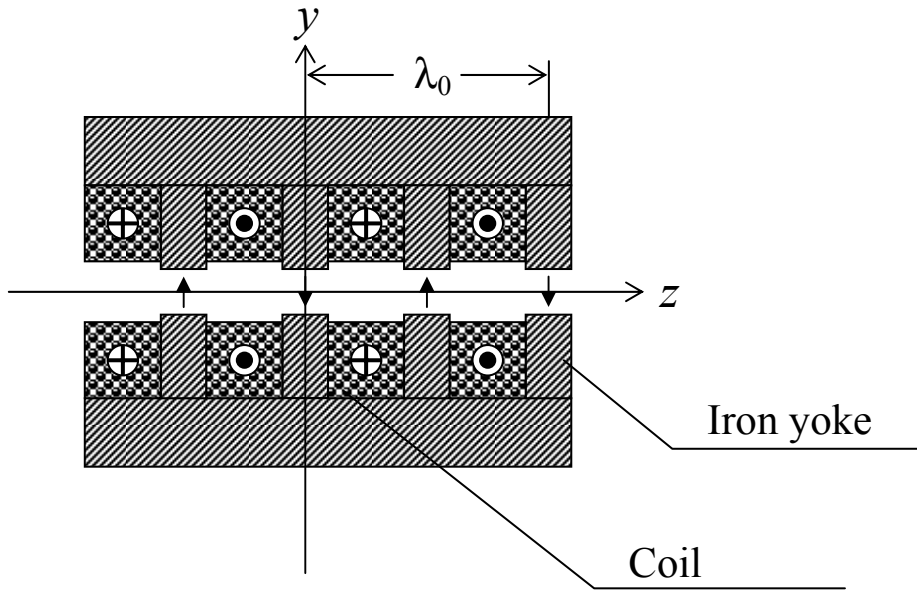
Under dimensional changes PM systems have different scaling properties than EM ones /2/. For the permanent magnet systems the field value  $B$  is proportional to the magnetization (magnetic moment of the unit volume)  $M$ . Therefore a change of the geometric scale does not change the magnetic field value  $B$ . For PM applications this scaling property can be used for building PM prototypes. A scaled down model with the same field properties can be made, which is less expensive and easier to manufacture than a full scaled one.

For EM devices in contrast, according to  $\text{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c$ ,  $S$ -times size decrease leads (at constant  $\mathbf{j}$ ) to the  $S$ -times decrease of the field. For this reason EM undulators with reasonable field levels can only be built at large period lengths, or with moderate fields at smaller period lengths. The majority of applications, where field levels of typically 1 Tesla or above and period

lengths of 3-10 cm are needed, is out of reach for EM. For SC technology the situation is in principle the same. But here the current densities are more than 100 times larger, than in conventional EM, so that the physical limits are not reached within the parameter space of insertion devices.

To describe the undulator magnetic field in more detail we consider first the most widely-used planar undulator. Fig. 1 shows the so-called hybrid scheme /3-5/. It uses PM blocks and soft magnetic material to conduct the magnetic flux. Fig 2 shows a cross section of an EM version in the  $y$ - $z$  plane.

Both undulator designs are periodic arrays. In Fig.1 PM blocks and soft magnetic material alternate. Soft magnetic materials are either low carbon steel or materials based on Co-Fe, which have a higher saturation induction. In the EM design in Fig 2 there is a comb-like bus of soft iron in which the coil is embedded. In the PM system the sources of magnetomotive force are the molecular currents. In the EM system it is the current in conductor. There are no currents in the



**Fig. 2:** Schematic of an EM Undulator

working gap of the undulator. Therefore in this region it is convenient to use a scalar magnetic potential  $\psi$ ,

$$\mathbf{B} = \text{grad} \psi, \quad \Delta \psi = 0, \quad (3.1)$$

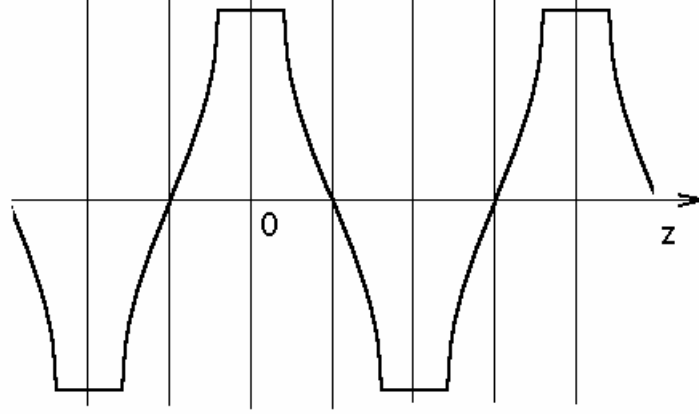
to describe the field. The scalar potential is periodic  $\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z + \lambda_u)$ . Moreover, for undulators, shown in Fig. 1 and Fig. 2 it satisfies the following symmetry conditions:

$$\psi(x, y, z) = -\psi(x, y, z + \lambda_u/2) = \psi(x, y, -z) = -\psi(x, -y, z) = \psi(-x, y, z). \quad (3.2)$$

Usually poles are flat and wide enough in  $x$  direction so that  $\psi$  effectively depends only on  $y$  and  $z$ . Then Eq. (3.1, 3.2), may be written explicitly in the simple form

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{(2n+1)k} \cos[(2n+1)kz] \sinh[(2n+1)ky]. \quad (3.3)$$

It is worth noting, that due to the symmetry properties (3.2) the magnetic field contains only odd harmonics. An approximate plot of  $\psi(g/2, z)$  is shown in Fig. 3.



**Fig. 3.** Potential at the upper boundary.

The flat tops correspond to the poles. For unsaturated iron the pole is approximately an equipotential. To calculate the amplitudes  $B_n$  one has to specify the potential at the gap boundaries at  $x = \pm g/2$ . For a hybrid the potential is given by  $\psi_0 = Ht/2$ . Here  $H$  is the magnetic field intensity in the permanent magnet block,  $t$  is the length of the block measured along the direction of magnetization. For the EM device the potential is given by  $\psi_0 = 2\pi I/c$ , where  $I$  is the current in the groove between two neighboring poles. The boundary potential may be represented as a Fourier series:

$$\psi(g/2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos[(2n+1)kz]. \quad (3.4)$$

Then from Eq. (3.3, 3.4) the amplitudes of the on-axis field harmonics are:

$$B_n = \frac{(2n+1)k a_n}{\sinh\left[(2n+1)k \frac{g}{2}\right]}. \quad (3.5)$$

Eq. (3.5) shows, that amplitudes of high-order harmonics are small for short-period undulators. The fundamental harmonic amplitude may be estimated as

$$B_0 \approx \frac{k\psi_0}{\sinh\left(k \frac{g}{2}\right)}. \quad (3.6)$$

The working point of the magnet material i.e. the magnetic field intensity  $H$ , is adjusted through the length of the magnet,  $t$ . A good choice optimizes the energy product ( $BH$ ) and therefore the obtainable peak field. For permanent magnet undulators  $t/\lambda_u \approx 0.3$  is a good value to start with and a working point is around  $\mu_0 H/B_r \approx -0.8$  ( $B_r$  is the remanent field of the magnet material). Then Eq. (3.6) gives

$$B_0 \approx 0.8 \frac{B_r}{\sinh\left(k \frac{g}{2}\right)}. \quad (3.7)$$

The estimation given above is only approximate. However it gives quite good agreement for short period devices such as the TTF undulator. For its parameters (gap=12mm, period length =27.3mm, magnet length = 8.4mm, remanent field=1.17T) eq.3.7 results in 0.5T which is in good agreement with the measured value of 0.47T.

In a real undulator system there is always a spread of the working point across the material. In areas near the gap especially close to the poles the internal field intensity is smaller than further away. Moreover it is gap dependent and may reverse its direction at large gap

meaning that some part of a magnet suffers higher demagnetization than others. A fraction of the volume closed to the gap may even be operated in a reversed condition, where the internal field is anti-parallel to the magnetization. A detailed study of the internal field intensity is therefore part of a magnetic design of a specific structure.

Various grades of permanent magnet materials based on NdFeB with  $B_r$  up to 1.4 T are available commercially. A critical material property in this context is the coercive field  $H_{C,J}$ , the field intensity where the magnetization vanishes and the magnet is demagnetized.  $H_{C,J}$  varies strongly between different grades and in addition has a large temperature coefficient of -0.5 to -0.8 %/K. Unfortunately grades with highest  $B_r$  do not have the highest  $H_{C,J}$ . The selection of the material therefore must be a compromise. In order to avoid thermal demagnetization it must also include an assumption of the highest possible temperature a magnet is going to be exposed to during its operational life.

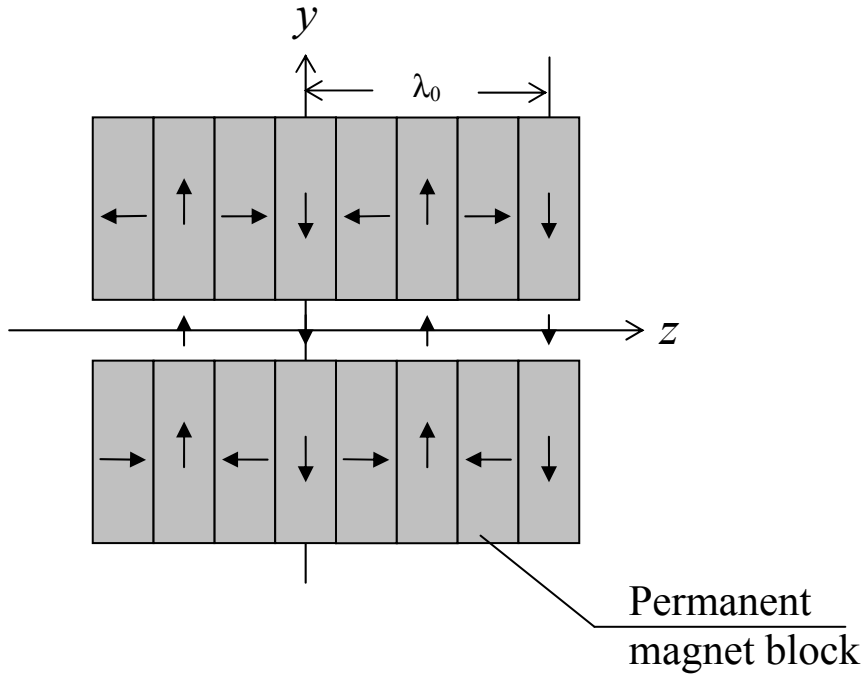
For the VUV FEL the magnet material was chosen such that it could be reversely operated at a demagnetizing field up to -1400kA/m and up to 50°C. The selected material therefore had a  $B_r$  of 1.17T.

For a specific magnet structure the gap dependence of the field may be calculated using the Halbach formula /3/

$$B_0 = a \exp \left\{ b \left( \frac{g}{\lambda_u} \right) + c \left( \frac{g}{\lambda_u} \right)^2 \right\}. \quad (3.8)$$

The values for  $a$ ,  $b$  and  $c$  are empirical parameters and depend on details of a specific magnetic design such as exact dimensions of magnets and poles and the properties of the PM. Also the use of wedge-shaped poles and permanent magnet blocks which may increase the field amplitude by 10 – 20% can be included. They are determined by fitting either to numerical field calculations or to experimental data. For state of the art NdFeB structures  $a = 3.44$  T,  $b = -5.08$ ,  $c = 1.54$  might be a good choice. In ref /1/ coefficients for different magnetic structures are given. Due to different details in the magnetic design they differ by the ones given above.

An intrinsic limitation of both hybrid and electromagnetic undulator field is due to pole saturation. Provided that spatial dimensions are large enough EM structures can reach fields up to about 2T. Due to lack of cooling saturation cannot be compensated by more current in the windings and higher field become problematic for EM. No examples are known in literature. For PM and SC systems, however, higher fields are possible. A peak field of 3.57T at a gap of 6mm has been reported for an asymmetric wiggler built for the ESRF /6/, and several superconducting wigglers with field up to 10T were built in the Budker INP /7/. The majority of devices however are operated below 2T.



**Fig. 4.** Pure permanent magnet planar undulator.

There is another design principle, which avoids the use of soft magnetic parts /8/. It might be used for short-period undulators i.e.  $\pi g/\lambda_u > 1$ . It is sketched in Fig. 4. The value of field fundamental harmonics for such undulator using four orientations per period is /8/ :

$$B_0 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} B_r \exp\left(-k \frac{g}{2}\right) [1 - \exp(-k h)] \quad (3.9)$$

Here  $h$  is the block height.

For  $\pi g/\lambda_u > 1$ . the scalar magnetic potential Eq. (3.3), may be truncated to

$$\psi \approx \frac{B_0}{k} \cos(kz) \sinh(ky).$$

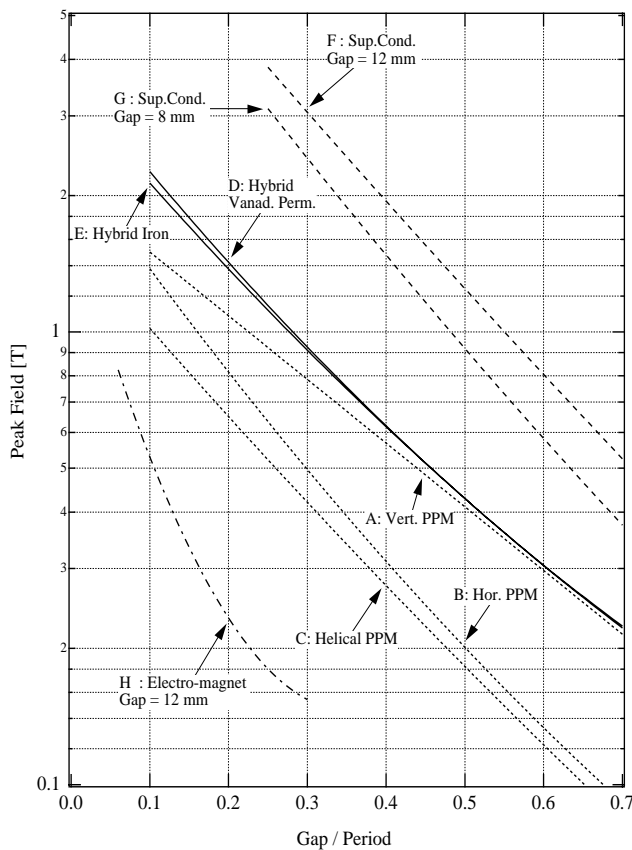
(3.10)

In many cases the approximation of the infinitely wide planar undulator (used to obtain Eq. (3.3)) is not sufficient. Then Eq. (3.10) may be generalized as

$$\psi \approx \frac{B_0}{k_y} \cos(kz) \sinh(k_y y) \cosh(k_x x),$$

(3.11)

where  $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ ,  $k_x$  is zero for a wide planar undulator, imaginary



**Fig.5:** Peak field versus gap/period for EM, PM and SC technology taken from ref. /1/ (courtesy P. Elleaume)

for too narrow poles, and real for “concave” poles (when gap is maximum at  $x = 0$ ). Field properties of PM, EM and SC structures are compared in Fig.5. Data are taken from ref /1/. They are plotted as a function of  $g/\lambda_0$ , which, due to the scaling properties is a natural parameters for PM structures. For EM and SC structures however specific examples have to be investigated. Fig 6 demonstrates that PM outperforms EM by factors but also shows that higher field levels by more than a factor 2 can be obtained using SC. Consequently there have been attempts to use SC for prototype devices /9-12/. These devices are still very exotic. Unlike PM technology, which is now fairly mature there are considerable technological difficulties to overcome until SC undulators might be used routinely.

An interesting combination between PM structures and cryogenics has been published recently /13/. The temperature dependencies of PM materials was used to obtain significantly higher field levels when operated at 148 K. Several permanent magnet undulators have been built and tested for Spring8 using this effect. A field increase of 40-50% as compared to room temperature has been reported.

## 4. Focusing

Focusing plays an essential role for the FEL process especially in long undulator systems. Electron beam parameters in an FEL such as beam energy, normalized emittance, intrinsic energy spread, bunch charge and bunch length but also undulator period length and K-parameter and radiation wavelength determine the overall performance and the properties of an FEL. An important role plays the transverse beam size, which is strongly influenced by the focusing in the undulator section. In contrast to the parameters first mentioned the focusing can be modified by electron optical means.

To consider the undulator natural focusing we'll return to the particle motion in undulators in more detail. As it follows from Eq. (2.2), particle in an undulator is exposed to the oscillating Lorenz force. This force is small enough, and therefore the trajectory is almost straight ( $ka \ll 1$ ), and field amplitude variation over oscillation amplitude is negligible. Then an off-axis trajectory may be represented as the sum of fast-oscillating and slow terms

$$x = x_{\sim} + X, \quad y = y_{\sim} + Y. \quad (4.1)$$

This is a well-known case of motion in fast-oscillating field [14]. Average kinetic energy of such oscillations plays the role of potential energy for the slow (averaged) components of transverse coordinates. In our case it is almost obvious, as the total kinetic energy of particle is constant in magnetic field. When the oscillation amplitude increases, the kinetic energy of averaged motion decreases. The averaged trajectory equations are

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = -\frac{\partial}{\partial X} U(X, Y), \quad \frac{d^2 Y}{dz^2} = -\frac{\partial}{\partial Y} U(X, Y), \quad (4.2)$$

where

$$U = \frac{1}{2} k^2 (\overline{x_{\sim}^2} + \overline{y_{\sim}^2}) = \frac{1}{2} \left( \frac{e}{pck} \right)^2 \left[ \overline{B_x^2(X, Y, z)} + \overline{B_y^2(X, Y, z)} \right]. \quad (4.3)$$

Using Eq. (3.11) one get

$$U \approx \frac{1}{4} \left( \frac{eB_0}{pck} \right)^2 \left( 1 + k_y^2 Y^2 + k_x^2 X^2 + \frac{1}{3} k_y^4 Y^4 + \frac{1}{3} k_x^4 X^4 + k_x^2 k_y^2 X^2 Y^2 \right). \quad (4.4)$$

The second-order terms in brackets describe linear focusing, and fourth-order terms – cubic nonlinearity of the focusing force.

In the simplest case of wide planar undulator there is only vertical focusing

$$\frac{d^2 X}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dz^2} = -\frac{1}{\beta_u^2} \left( Y + \frac{8}{3} k^2 Y^3 \right). \quad (4.5)$$

The value of matched beta function  $\beta_u = \sqrt{2} pc / (eB_0)$  is a convenient characteristic of the undulator focusing. It is equal to the curvature radius of the particle trajectory in the mean-square undulator field  $B_0 / \sqrt{2}$ . The cubic term in the focusing force may be neglected in most of cases, except of undulators on storage rings. The use of concave poles gives the possibility to redistribute focusing to horizontal motion. For example, equal focusing take place at  $k_x = k_y = k / \sqrt{2}$ . It worth noting, that undulator focusing (as any focusing in a magnetic field) is caused by the trajectory curvature and quadrupole field component, taken with respect to the wiggling reference trajectory. Therefore the undulator focusing may be derived without use of the fast oscillating field method, but the calculations are much more complicated. At high particle energies the “natural” undulator focusing is weak. Therefore in a long undulators the use of additional focusing is desirable.

## References

1. P. Elleaume, J. Chavanne, B. Faatz, NIM A 455, (2000) 503
2. K. Halbach, Demonstration in several talks, unpublished

3. K. Halbach, *J. de Physique* 44, Colloque C1, supplement to #2 (1983), C1.
4. E. Hoyer et al. *NIM* 208, (1983) 117
5. G.A. Korniyukhin, G.N. Kulipanov, V.N. Litvinenko, N.A. Vinokurov, and P.D. Voblyi, *NIM* 208 (1983), 189.
6. J. Chavanne, P. van Vaerenbergh, P. Elleaume, *NIM* A421, (1999) 352
7. M.G. Fedurin, M.V. Kuzin, N.A. Mezentsev, and V.A. Shkaruba, *NIM* A470, (2001) 34
8. K. Halbach, *NIM* 187, (1981) 109.
9. Luis R. Elias, J. M. J. Madey, Todd I. Smith, H. A. Schwettman and W. M. Fairbank, *Optics Communications*, Volume 18 (1976), 129. L. R. Elias and J. M. Madey, *Rev. Sci. Instr.*, V. 50, I. 11 (1979), 1335 – 1341.
10. G. Ingold, L. Solomon, I. Ben-Zvi, S. Krinsky, D. Li, D. Lynch, J. Sheehan, M. Woodle, X.Z. Qiu, L.H. Yu, X. Zhang, W. Sampson, M. Gerber, K. Robins, I. Lehrmann, R. Heuer, J. Sheehan and D. Weissenburger, *Proc. of PAC 1993*, Washington DC, p.1439.
11. G. Ingold, I. Ben-Zvi, L. Solomon, M. Woodle, *NIM* A375 (1996),451
12. S. Chouhan, R. Rossmanith, S. Strohmer, D. Doelling, A. Geisler, A. Hobl, S.Kubsky, *Proceedings of the 2003 Particle Accelerator Conference*, May 12-16, 2003, Portland, Oregon, USA
13. T. Hara, T. Tanaka, H. Kitamura, T. Bizen, X. Marechal, T. Seike, T. Kohda, Y. Matsuura, *Phy. Rev. Special Topics Accelerators and Beams*, Vol. 7, (2004), 050702
14. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Mechanics*, Oxford, Pergamon Press, 1960.