Тема 5. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

1. Волны, Классификация волн
2. Уравнения плоской и сферической волн. Волновое уравнение
3. Распространение волн в упругой среде. Зависимость скорости волны от свойств среды
4. Энергия волны
5. Сложение волн. Стоячие волны
6. Фазовая и групповая скорости волн
7. Звуковые волны
8. Эффект Доплера

1. Волны. Классификация волн

Волны представляют собой изменения состояния среды (возмущения), распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию. Иначе говоря, процесс распространения колебаний в пространстве называется <u>волной</u>.

Наиболее важные и часто встречающиеся виды волн это упругие волны, волны на поверхности жидкости и электромагнитные волны.

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаются от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, увлекаемые частицы будут отставать по фазе от тех частиц, которые их увлекают.

При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды. Среда рассматривается как сплошная, т.е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

<u>Упругими или механическими волнами</u> называются механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде. Среда называется упругой, если ее деформации, вызываемые внешними воздействиями, полностью исчезают после прекращения этих воздействий. Частными случаями упругих волн являются звуковые и сейсмические волны (колебания, распространяющиеся в Земле от очагов землетрясений, взрывов и других источников).

<u>Волны на поверхности жидкости (поверхностные волны)</u> – это распространяющиеся вдоль свободной поверхности жидкости (или поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей) возмущения этой поверхности, возникающие под влиянием внешних воздействий (падения тел, движения судов, ветра и тому подобное). В образовании и распространении этих волн определяющую роль играют силы поверхностного натяжения и тяжести.

Основное свойство всех волн, независимо от их природы состоит в том, что в виде волны осуществляется перенос энергии без переноса вещества. Частицы среды, в которой распространяется волна не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. в зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна.

Итак, ***колеблющиеся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны. Процесс распространения колебаний в среде называется*** *волной*.

Волны бывают ***поперечными*** (*колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения*), и ***продольными*** (*сгущение и разряжение частиц среды происходят в направлении распространения*). Продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды и поэтому могут распространяться в любой среде – твердой, жидкой и газообразной. Примером таких волн являются звуковые волны в воздухе.

В поперечной волне частицы колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Поперечные волны (упругие) могут возникнуть лишь в среде, обладающей сопротивлением сдвигу (обладающие упругостью формы), т.е. в твердых телах. Примером поперечных волн могут служить волны, распространяющиеся вдоль струн музыкальных инструментов. Упругость кристаллического твердого тела обусловлена силами взаимного притяжения и отталкивания частиц (ионов, атомов и молекул), образующих это тело и совершающих беспорядочные тепловые колебания около узлов его кристаллической решетки. Силы взаимодействия частиц препятствуют деформациям кристаллической решетки, связанные с изменением, как объема тела, так и его формы. Поэтому твердые тела помимо объемной упругости обладают упругостью формы, которая проявляется в их сопротивлениях деформации сдвига.

Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, еще не начавших колебаться, называется ***фронтом волны***.

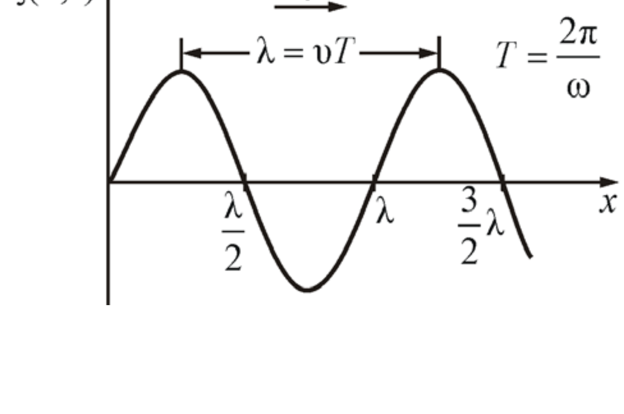
В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны.

<u>Общие характеристики и свойства волн</u>

Основными характеристиками гармонической волны является <u>длина волны</u> λ - расстояние между двумя максимумами или минимумами возмущений, и <u>период волны</u> T- время, за которое совершается один полный цикл колебаний.

1. Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны* λ

$$\lambda = \upsilon T\ ;$$



где υ – скорость распространения волны, $T = \dfrac{1}{\nu}$ – период, ν – частота.

Отсюда, скорость распространения волны можно найти по формуле:

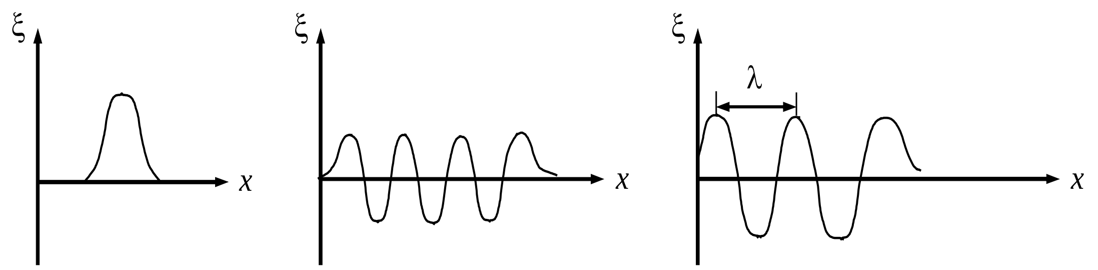
$$\upsilon = \lambda\nu\ .$$

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется ***волновой поверхностью***. Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом, т.е. волновых поверхностей бесконечное множество. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положение равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт только один и он все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях волновые поверхности имеют форму *плоскости* или *сферы*, соответственно волны называются ***плоскими*** или ***сферическими***. В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне – систему концентрических сфер.

2. Волны могут иметь различную форму.

Одиночной волной или <u>импульсом</u> (а) называется сравнительно короткое возмущение, не имеющее регулярного характера. Ограниченный ряд повторяющихся возмущений называется <u>цугом</u> волны (б). Обычно понятие цуга относят к отрезку синусоиды. Особое значение в теории волн имеет представление о <u>гармонических</u> волнах (в), т.е. о бесконечно синусоидальных волнах, в которых все изменения состояния среды происходят по закону синуса или косинуса.



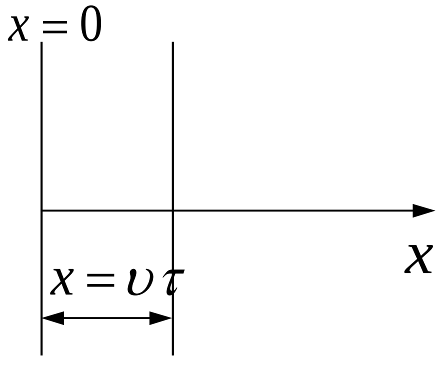
а) *б)* *в)*

2. Уравнения плоской и сферической волн. Волновое уравнение

<u>Уравнение плоской волны</u>

Уравнением волны называется выражение, которое дает смещение ξ колеблющейся точки как функцию ее координат (имеются в виду координаты равновесного положения точки) x,y,z и времени t.

$$\xi = \xi(x, y, z; t)$$



Функция, описывающая волновой процесс, должна быть периодической как относительно времени t, так и относительно координат x,y,z. Периодичность по t следует из того, что ξ описывает колебания точки с координатами x,y,z.

Периодичность по координатам вытекает из того, что точки отстоящие друг от друга на расстоянии λ, колеблются одинаковым образом.

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер. Для упрощения направим оси координат так, что бы ось x совпадала с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярны к оси x и поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t:

$$\xi = \xi(x,t).$$

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости x=0, имеет вид

$$\xi(0,t) = A\cos\omega t.$$

Найдем вид колебаний частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости x=0 до плоскости с координатой x , волне потребуется время:

$$\tau = \frac{x}{\upsilon}.$$

Следовательно, колебания частиц, находящихся в плоскости x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости x=0, т.е. уравнение колебаний точки, находящейся на расстоянии x от источника колебаний будет иметь вид:

$$\xi(x,y) = A\cos\omega(t-\tau) = A\cos\omega(\tau - \frac{x}{\upsilon}).$$

Итак, уравнение плоской волны запишется следующим образом:

$$\xi = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$$

Величина ξ представляет собой смещение любой из точек с координатой x в момент времени t.

При выводе формулы предполагалось, что амплитуда колебаний во всех точках одна и та же. В случае плоской волны это наблюдается, если энергия волны не поглощается средой.

В общем виде, *уравнение плоской волны* записывается так:

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) \quad \text{или} \quad \xi = A\cos\omega\left[\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right) + \varphi\right].$$

и называются ***уравнениями бегущей волны***.

Зафиксируем какое- либо значение фазы, стоящей в уравнении $\xi = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$, положив

$$\omega(t - \frac{x}{\upsilon}) = const$$

Данное выражение определяет связь между временем (t) и тем местом (x), в котором зафиксировано определенное значение фазы. Тогда $\frac{dx}{dt}$ дает скорость, с какой перемещается данное значение фазы. Продифференцировав полученное выражение , получим:

$$dt - \frac{1}{\upsilon}dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon$$

Таким образом, скорость распространения волны υ в уравнении $\xi = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$ - есть скорость перемещения фазы, в связи, с чем ее называют <u>фазовой скоростью</u>.

Следовательно, уравнение $\xi = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$ описывает волну, распространяющуюся в сторону возрастания x. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, будет описываться уравнением

$$\xi = a\cos(t + \frac{x}{\upsilon})$$

Действительно, дифференцирование приравненной константе фазы волны , дает

$$\frac{dx}{dy} = -\upsilon$$

откуда следует, что волна распространяется в сторону убывания x.

Уравнение плоской волны можно придать симметричный относительно x и y вид. Для этого введем величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

которая называется волновым числом.

Из выражений $\lambda = \upsilon T$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ вытекает, что

$$\upsilon = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi}{kT} = \frac{\omega}{k},$$

т.е.

$$k = \frac{\omega}{\upsilon}$$

Тогда уравнение $\xi = A\cos\omega(t - \frac{x}{\upsilon})$ запишется в виде:

$$\xi = A\cos(\omega t - kx)$$

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания, x будет отличаться только знаком при члене kx.

При выводе формулы $\xi = A\cos(\omega t - kx)$ предполагалось, что амплитуда колебаний *A* не зависит от *x*. Для плоской волны это наблюдается в том случае, когда энергия волны не поглощается средой. При распространении в среде, поглощающей энергию, интенсивность волны с удалением от источника колебаний постепенно уменьшается, т.е. наблюдается затухание волны. Опыт показывает, что в однородной среде такое затухание происходит по экспоненциальному закону

$$A = A_0 \exp(-\gamma x),$$

где γ- линейный коэффициент поглощения упругих волн, зависящий от свойств среды и частоты волны; A_0- амплитуда в точках плоскости x=0.

Соответственно, уравнение плоской волны тогда имеет следующий вид:

$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x)\cos(\omega t - kx),$$

а при наличии начальной фазы колебаний φ

$$\xi = A_0 \exp(-\gamma x)\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Следует обратить внимание на то, что волновое число – это вектор (волновой вектор), направление которого совпадает с направлением нормали к волновой поверхности: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$, где $\vec{\text{n}}$ – нормаль к волновой поверхности.

Уравнение сферической волны

Найдем уравнение сферической волны. Всякий реальный источник волн обладает некоторой протяженностью. Однако, если ограничиться распространением волны на расстояниях от источника, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать точечным. В изотропной и однородных средах (среда называется изотропной, если ее физические свойства одинаковы во всех направлениях; среда называется однородной, если ее физические свойства не изменяются от точки к точки) волна, порождаемая точечным источником, будет сферической. Допустим, что фаза колебаний источника равна ($\omega t+\alpha$). Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса r, будут колебаться с фазой

$$\omega(t - \frac{r}{\upsilon}) + \varphi = \omega t - kx + \varphi,$$

так как, чтобы пройти путь r, волне потребуется время

$$\tau = \frac{r}{\upsilon}.$$

Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной – она убывает с расстоянием от источника по закону $\frac{1}{r}$ (так как средний поток энергии через сферу любого радиуса должен иметь одинаковые значения, т.е. должно выполняться условие

$$A_r^2 r^2 = Const,$$

где A_r- амплитуда незатухающей сферической волны).

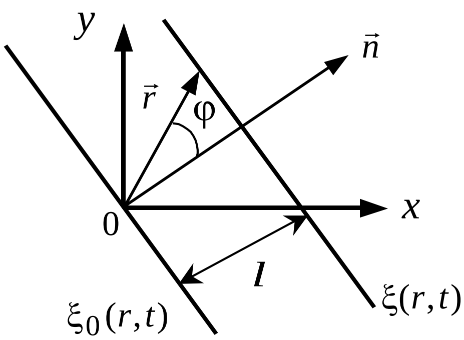
Следовательно, уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где A - постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице.

Для поглощающей среды уравнение сферической волны имеет вид

$$\xi = \frac{A\exp(-\gamma r)}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi)$$



<u>Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении</u>

Найдем уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, образующем с осями координат x,y,z углы α, β, γ. Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат 0, имеет вид:

$$\xi = A\cos\omega t$$

Волновая поверхность (плоскость) отстоит от начала координат на расстояние l. колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний на время $\tau = \frac{l}{\upsilon}$;

Выразим l через радиус- вектор $\vec{r}$ точек рассматриваемой поверхности. Для этого введем единичный вектор $\vec{n}$ нормали к волновой поверхности. Видно, что скалярное произведение $\vec{n}$ на радиус- вектор $\vec{r}$ любой из точек поверхности имеет одно и тоже значение равное l:

$$\left(\vec{n}\vec{r}\right) = r\cos\varphi = l$$

тогда выражение запишем в виде

$$\xi = A\cos\omega(t - k\vec{n}\vec{r})$$

Вектор $\vec{k} = k\vec{n}$, равный по модулю волновому числу $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и имеющий направление нормали к волновой поверхности, называется <u>волновым вектором</u>. Таким образом, уравнение волны можно представить в виде:

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos\omega(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Данное уравнение является уравнением плоской незатухающей волны, распространяющейся в направлении, определяемом волновым вектором $\vec{k}$.

Для затухающей волны

$\xi\left(\vec{r},t\right) = A_0\exp(-\gamma\vec{n}\vec{r})\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ определяет отклонение от положения равновесия точки с радиусом- вектором $\vec{r}$ в момент времени t. Чтобы перейти от радиуса вектора точки к ее координатам *x,y,z*, выразим скалярное произведение $\vec{r}\vec{k}$ через компоненты векторов по координатным осям

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z\,.$$

Тогда уравнение плоской волны примет вид:

$$\xi(x,y,z,t) = ACos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\,,$$

где

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha,\ k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta,\ k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma.$$

Уравнение $\xi(x,y,z,t) = ACos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ определяет отклонение точки с координатами *x,y,z* в момент времени *t*. В случае, когда $\vec{n}$ совпадает с осью *x*, $k_x = k,\ k_y = 0,\ k_z = 0$ и уравнение $\xi(x,y,z,t) = ACos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ переходит в уравнение $\xi = A\cos(\omega t - kx)$.

Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называется волновым. Чтобы установить вид волнового уравнения, сопоставим вторые частные производные по координатам и времени от функции $\xi(\vec{r},t) = A\cos\omega(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ описывающей плоскую волну. Продифференцировав эту функцию по каждой из переменных, получим:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = -\omega^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = -k_x^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = -k_y^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = -k_z\xi.$$

Сложение производных по координатам дает

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2\xi$$

Сопоставив эту сумму с производной по времени и заменив $\frac{k^2}{\omega^2}$ через $\frac{1}{\upsilon^2}$, так как $k = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon}$, то получим уравнение:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

Это и есть волновое уравнение. Его можно написать в виде

$$\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

где Δ - оператор Лапласа ($\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \Delta\xi$).

Всякая функция, удовлетворяющая уравнению вида $\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, дает фазовую скорость этой волны.

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси X, волновое уравнение имеет вид:

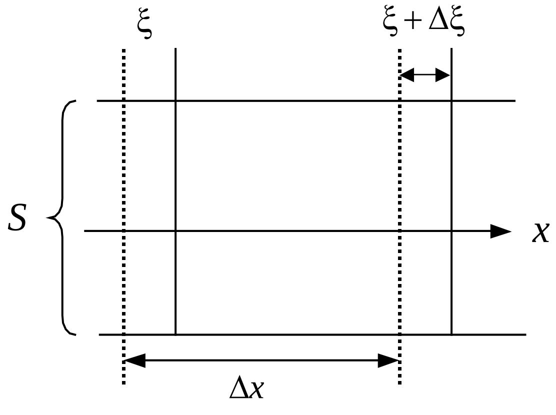
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

3. Распространение волн в упругой среде. Зависимость скорости волны от свойств среды

Волны в твердых телах

Продольная волна в упругой среде. Пусть в некоторой среде распространяется плоская волна. Выделим в этой среде в направлении оси X, вдоль которого волна распространяется, цилиндрический объем высотой ΔX с площадью основания S. Смещение ξ частиц с разными x в каждый момент времени оказывается различными. Если основание цилиндра с координатой x имеет в некоторый момент времени смещение ξ, то смещение основания с координатой $x+\Delta x$ будет $\xi + \Delta\xi$. Следовательно, присутствует упругая продольная деформация.

Следовательно, рассматриваемый объем деформируется, так как он получает удлинение $\Delta\xi$ ($\Delta\xi$ - алгебраическая величина, $\Delta\xi < 0$ соответствует сжатию цилиндра) или относительное удлинение $\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$. Величина $\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$ дает среднюю деформацию цилиндра.



Ри

Так как ξ меняется с изменением x не по линейному закону, истинная деформация в различных сечениях цилиндра будет неодинакова. Чтобы получить деформацию ε в сечении x, нужно устремить Δx к нулю. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(знак частной производной взят потому, что ξ зависит не только от x, но и t).

Наличие деформации растяжения свидетельствует о существовании нормального напряжения $\sigma = \frac{f}{S}$ (где f- сила, S- площадь поперечного сечения выделенного цилиндра).

Из опыта следует, что наблюдается упругая деформация, то относительная деформация пропорциональна нормальному напряжению:

$$\varepsilon = \alpha\sigma,$$

где α - коэффициент упругости (величина численно равная относительному удлинению при напряжении равном единице).

Обратная коэффициенту упругости величина, используемая для характеристики упругих свойств материала, называется модулем Юнга:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mathrm{E}}$$

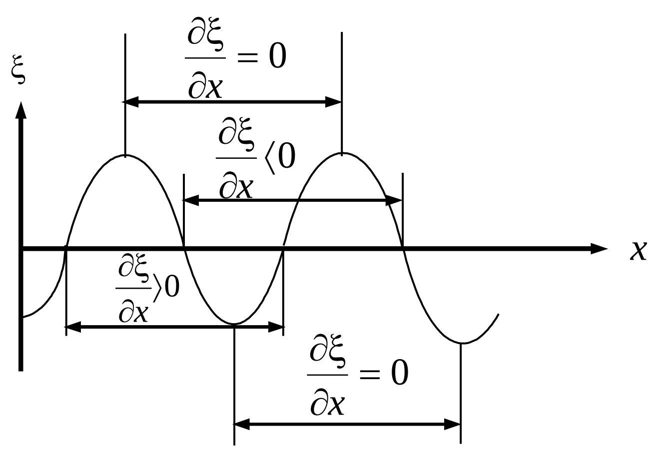
откуда следует, что модуль Юнга равен такому нормальному напряжению, при котором относительное удлинение было бы равно единице. Тогда

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon = \mathrm{E}\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

где E - модуль Юнга среды.

Следует заметить, что относительная деформация $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, а значит и напряжение σ в фиксированный момент времени зависят от x.

Там, где отклонение частиц от положения равновесия максимальны, деформация и напряжение равны нулю. В местах, где частицы проходят через положение равновесия, деформация и напряжение достигают максимального значения, причем положительные и отрицательные деформации (т.е. растяжения и сжатия) чередуются друг с другом. В соответствии с этим, продольная волна состоит из чередующихся разряжении и сгущений среды. Напишем уравнение движения для выделенного в среде цилиндрического объема. При очень малом Δx ускорение цилиндра можно принять равным $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$. Масса цилиндра равна $\rho\Delta xS$, где ρ -плотность недеформированной среды. Сила, действующая на цилиндр, равна разности нормальных напряжений в сечении $x+\Delta x$ и в сечении x:



$$f = \mathrm{E}S\left[(\frac{\partial\xi}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial\xi}{\partial t})_x\right] = \mathrm{E}S\,\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\xi}{\partial x})\Delta x = \mathrm{E}S\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x\,.$$

Подставляя массу, ускорение и силу в уравнение второго закона Ньютона, получим:

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mathrm{E}S\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x\,.$$

После сокращения на $S\Delta x$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,,$$

которое представляет собой волновое уравнение, написанное для частного случая, когда ξ не зависит от y и z.

Сопоставим $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ находим, что:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,,$$

где υ - фазовая скорость продольных упругих волн.

Если в среде присутствует упругая деформация сдвига, то аналогичные рассуждения приводят к следующему выражению для скорости:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}\,,$$

где G-модуль сдвига.

Итак, $\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ и $\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ представляют собой выражение для скорости упругих волн (продольных и поперечных) в твердой среде. Заменяя модуль Юнга обратной ему величиной α, которая называется коэффициентом упругости придем к формуле:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{\rho\alpha}}\,,$$

которая пригодна, как для твердых, так и для жидких, и газообразных сред (ранее уже отмечалось, что продольные волны связаны с объемной деформацией упругой среды и поэтому могут распространяться в любой среде - твердой, жидкой и газообразной, в отличие от поперечных волн, которые могут возникнуть лишь в средах, обладающих сопротивлением сдвигу, т.е. в твердых телах).

Волны в газах

Коэффициент упругости для газов определяется по аналогии с коэффициентом упругости α для твердых тел.

На рисунке представлены твердый стержень, сжимаемый вдоль своей оси, и столб газа, заключенный в цилиндре, закрытом поршнем. Под действием силы f, действующей на поршень газ сжимается, и высота столба газа уменьшается на Δl. Если сжатие небольшое, то по аналогии с твердым стержнем можно написать:

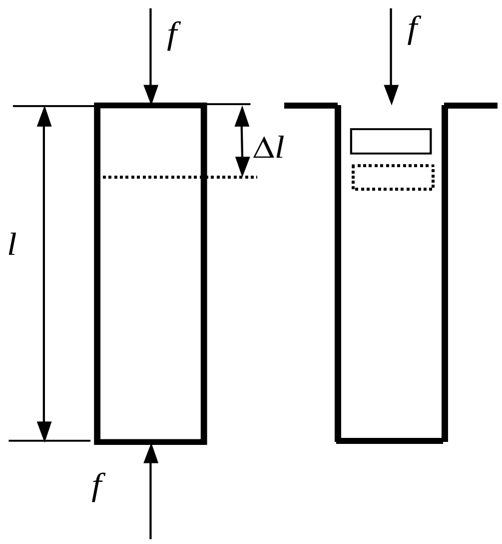
$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{f}{S}$$

где S - площадь поршня.

Отношение $\frac{f}{S}$ представляет собой приращение давления газа ΔP, а $\frac{\Delta l}{l}$ совпадает с относительным изменением объема газа $\frac{\Delta V}{V}$. Поэтому уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\alpha \Delta P$$

Знак «-» в формуле введен потому, что приращение объема ΔV и приращение давления ΔP всегда имеют разные знаки.



После дифференцирования получаем:

$$\alpha = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Величина $\frac{dV}{dP}$ зависит от характера процесса сжатия (или разряжения) газа. В звуковой волне сжатие и разряжение газа следуют друг так часто, что участки среды не успевают обмениваться теплом и процесс можно считать адиабатическим (процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой). Из уравнения адиабатического процесса $PV^{\gamma} = Const$ после дифференцирования получим:

$$P\gamma V^{\gamma-1} dV + V^{\gamma} dP = 0,$$

откуда

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V} \text{ или } \frac{dV}{dP} = -\frac{1}{\gamma}\frac{V}{P}$$

и, следовательно, коэффициент упругости равен

$$\alpha = \frac{1}{\gamma P},$$

где γ - отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме.

Подставляя полученное выражение в формулу $\upsilon = \sqrt{\frac{1}{\rho\alpha}}$ получим

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

Учитывая, что при изменении давления происходит также изменение плотности газа, найдем выражение для плотности из уравнения состояния идеального газа:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT\,,$$

где m - масса газа, заключенного в объеме V;
μ - масса моля;
R - универсальная газовая постоянная;
T - абсолютная температура.

Выражение для плотности:

$$P = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT}.$$

Подставив это выражение для плотности в $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, получим для скорости звука в газе следующую формулу:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

из которой видно, что скорость в газе от давления не зависит.

Вычислим значение скорости звука в воздухе при температуре $290\,K$ (комнатная температура). Для воздуха $\gamma = 1{,}40$, $\mu = 29\,{}^{кг}\!/_{кмоль}$, $R = 8{,}31 \cdot 10^3\,{}^{Дж}\!/_{кмоль \cdot К}$. После подстановки этих значений в формулу скорости, получим:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}40 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 290}{29}} = 340\,{}^{м}\!/_{с}.$$

Найденное значение скорости звука в воздухе хорошо согласуется со значением, полученным опытным путем.

4. Энергия упругой волны

При распространении волн частицы среды не перемещаются в пространстве вместе с волной, а только колеблются около своих положений равновесия. Объем среды, в которой распространяется волна, обладает кинетической энергией колебательного движения частиц. Для частиц среды массой Δm и объемом ΔV, которые участвуют в колебательном движении и имеют скорость υ кинетическая энергия равна $\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\upsilon^2$

Используем уравнение плоской продольной волны:

$\xi = A\cos(\omega t - kx)$, Тогда $\upsilon = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - kx)$ или

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\Delta V\sin^2(\omega t - kx)$$

Потенциальная энергия. Для определения потенциальной энергии волны, заметим, что энергия упруго деформированного элемента, объемом $\Delta V = \Delta x \cdot s$, при деформации растяжения или сжатия на величину $\Delta\xi$ равна $\Delta E_{пот} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta V$, где $\varepsilon = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \frac{d\xi}{dx}$ – относительная деформация выбранного элемента , используя уравнение волны, получим: $\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = Ak\sin(\omega t - kx)$, тогда $\Delta E_{пот} = \frac{1}{2}E\Delta Vk^2A^2\sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}\frac{E}{\upsilon^2}\Delta VA^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx)$. Если учесть, что скорость волны в упругой среде при растяжении равна $\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, то получим, что $\Delta E_k = \Delta E_{пот} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\Delta V\sin^2(\omega t - kx)$.

Полная энергия волны. Из сравнения $\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\Delta V\sin^2(\omega t - kx)$ и $\Delta E_{пот} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\Delta V\sin^2(\omega t - kx)$ видно, что кинетическая и потенциальная энергии частиц волны меняются синфазно в отличие от энергии колебаний материальной точки, совершающей гармонические колебания. для которой максимуму кинетической энергии соответствует минимум потенциальной энергии. Полная энергия гармонического осциллятора остается постоянной.

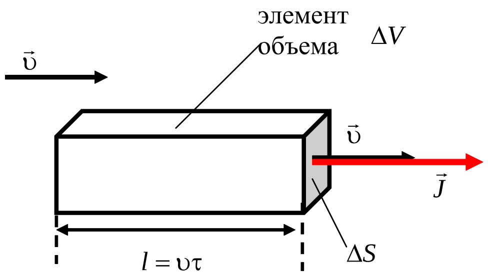
В случае волнового процесса полная энергия в малом объеме равна $\Delta W = \Delta E_k + \Delta E_{пот} = \rho\Delta VA^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}\rho\Delta VA^2\omega^2\left[1 - \cos(2\omega t - 2kx)\right]$. Энергия волны распространяется с той же скоростью υ, что и упругая волна, т.е. она не локализована в данном объеме, а передается посредством упругих волн от частицы к частице. Поэтому такие волны называют бегущими. Для определения энергии волны в некотором объеме V выражение ΔW нужно проинтегрировать по объему.

Плотность энергии и вектор Умова. Ранее было показано, что энергия плоской волны ΔW пропорциональна объему ΔV. Введем понятие плотности энергии: $w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\left[1 - \cos(2\omega t - 2kx)\right]$. Величина ω меняется со временем по гармоническому закону, среднее значение плотности энергии за период равно среднему за период значению $\cos(2\omega t-2kx)$ или $\sin^2(\omega t-kx)$:

$$\langle w\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho A^2\omega^2\sin^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 .$$

Распространение упругой волны сопровождается переносом энергии, поэтому можно ввести понятие о потоке энергии ΔΦ. равном количеству энергии, которая переносится в единицу времени через площадку, перпендикулярную скорости υ распространения волны.

За время τ через площадку ΔS протечет энергия, сосредоточенная в объеме ΔV параллелепипеда , равном $l\cdot\Delta S$, т.е. величина, равная $\langle\Delta W\rangle=\langle w\rangle l\cdot\Delta S=\langle w\rangle\upsilon\tau\Delta S$, тогда среднее значение потока энергии в единицу



времени $\Delta\Phi=\dfrac{\langle\Delta W\rangle}{\tau}=\langle w\rangle\upsilon\Delta S$ - волновой поток энергии. Волновой поток энергии обусловлен упругими напряжениями, которые передаются от частицы к частице.

Среднее значение потока энергии пропорционально площади ΔS, через которую протекает энергия. Поэтому вводят среднюю плотность J потока энергии, или интенсивность I волны, которая численно равна потоку энергии через единичную площадку, перпендикулярную скорости υ распространения волны $I=J=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta S}=\langle w\rangle\upsilon=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon$. Поскольку плотность потока энергии J определяется направлением переноса энергии в направлении распространения волны, то плотность потока энергии – это вектор. Направление вектора J совпадает с направлением скорости волны: $\vec{J}=\langle w\rangle\vec{\upsilon}$. Вектор плотности потока энергии был впервые введен в рассмотрение выдающимся русским физиком Н.А. Умовым (1846-1915) в 1874г. Н.А. Умов впервые ввел также понятия о скорости и направлении движения энергии, потока энергии, плотности энергии.

Выражение $I=J=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta S}=\langle w\rangle\upsilon=\dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon$ справедливо для волны любого вида (продольной, поперечной, сферической и т.д.).

Следует отметить, что интенсивность волны в данной точке есть среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной.

Зная $\vec{J}$ во всех точках произвольной поверхности S, можно вычислить поток энергии через эту поверхность. Полный поток энергии через поверхность равен сумме элементарных потоков $d\Phi=(\vec{J}\,d\vec{S})$ или

$$\Phi=\int_S(\vec{I}\,d\vec{S})$$

В случае плоской затухающей волны амплитуда убывает с расстоянием по закону $A = A_0 e^{-\gamma x}$, где γ - линейный коэффициент поглощения. Соответственно средняя плотность потока энергии (т.е. интенсивность волны) убывает по закону:

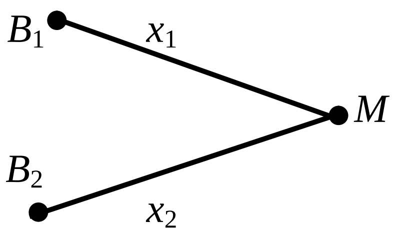
$$I = I_0 e^{-æx},$$

где $æ = 2\gamma$ -величина, называемая коэффициентом поглощения волны. Она имеет размерность, обратную размерности длины. Величина, обратная æ равна расстоянию, на котором интенсивность волны уменьшается в *e* раз.

5. Сложение волн. Стоячие волны

Интерференция волн. Волны от разных источников в некоторых областях среды могут накладываться друг на друга. В местах наложения волн результирующее смещение точек среды в любой момент времени является геометрической суммой смещений, вызываемых каждой волной в отдельности. В соответствии с принципом суперпозиции каждая волна ведет себя независимо от других волн и распространяется в пространстве так, как будто она не встречала другие волны. Наибольший интерес представляет сложение волн одинаковой частоты ($\omega_1 = \omega_2$), распространяющихся вдоль одного направления и имеющих в каждой точке пространства постоянную по времени разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2$. Такие волны называются когерентными, а источники таких волн называются когерентными источниками.

Сложение когерентных волн. В результате которого происходит усиление или ослабление колебаний, называется интерференцией.



Пусть складываются две когерентные волны, распространяющиеся в однородной среде от источников когерентных волн B_1 и B_2. В точке M происходит наложение волн друг на друга. Волны описываются уравнениями $\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - kx_1)$ и $\xi_2 = A_2 \cos(\omega t - kx_2)$. Результирующее смещение $\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos(\omega t - kx_1) + A_2 \cos(\omega t - kx_2)$ будет представлять собой гармоническое колебание той, же частоты ω и описывается уравнением $\xi = A\cos(\omega t + \alpha)$, где A – амплитуда результирующего колебания, которую можно определить по векторному методу сложения колебаний: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(kx_2 - kx_1)}$. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний. Если $\Delta\varphi = 2\pi n$, где n=1,2,3,4,…., то амплитуда $A=A_1+A_2$, но так как $\Delta\varphi = k(x_2 - x_1)$, то $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2\pi n$ и разность хода $x_2 - x_1 = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2}$ - условие максимума амплитуды. Это означает, что максимум амплитуды будет в тех точках, разность хода до которых от источников волн равна целому числе длин волн или четному числу полуволн, а сдвиг по фазе кратен 2π.

Если разность фаз $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, где n=1,2,3,4,…., то $A=A_1 - A_2$. Тогда разность хода этих волн $x_2 - x_1 = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$ - условие минимума амплитуды.

Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды ($I \sim A^2$), то в случае равных амплитуд в области максимума интенсивность волны возрастает в 4 раза, по сравнению с энергией колебаний возбуждаемым одним источником. В области минимума она равна нулю. Таким образом, при интерференции происходит перераспределение энергии из областей максимума в области минимума.

Стоячие волны.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется ***стоячей волной***. Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

Напишем уравнения двух плоских волн распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\},$$

положим начальную фазу $\varphi = 0$.

Сложим эти уравнения и преобразуем по формуле суммы косинусов: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t + kx}{2}\right)$$

т.к. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, то запишем

$$\xi = 2A\cos\omega t\,\cos kx = 2A\cos kx\,\cos\omega t$$

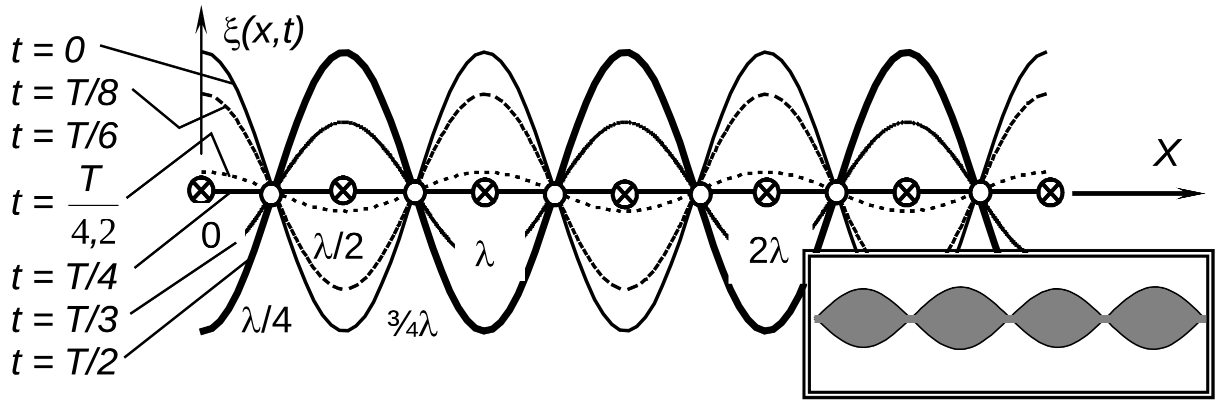
учтем, что $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, отсюда

$$\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t\,.$$

– ***уравнение стоячей волны***. В выражении для фазы не входит координата, поэтому можно записать

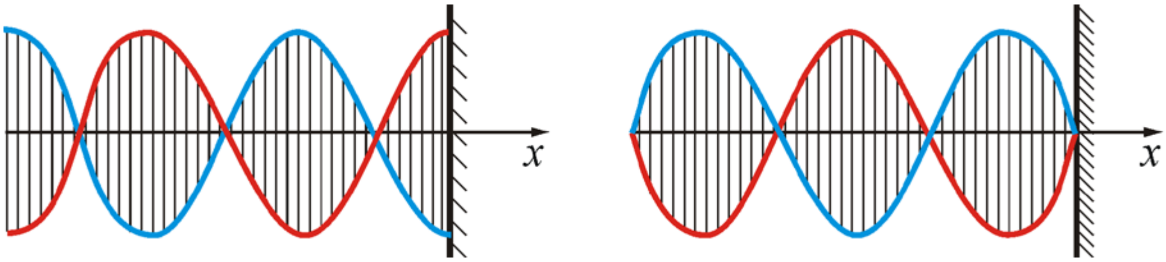
$$\xi = A^{*}\cos\omega t\,,$$

где суммарная амплитуда $A^{*} = 2A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$.



В точках, где координаты удовлетворяют условию $2\pi\dfrac{x}{\lambda}=\pm n\pi$ (n = 1, 2, 3, …), $\cos\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)=1$, суммарная амплитуда равна максимальному значению $A^*=2A$. Это – ***пучности*** стоячей волны. Координаты пучностей.

$$x_{\text{кучн}}=\pm n\lambda/2.$$



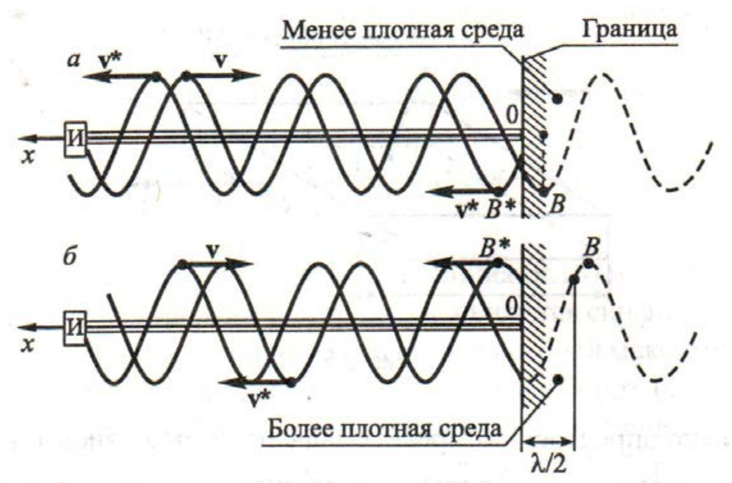
а б

В точках координаты, которых удовлетворяют условию $2\pi\dfrac{x}{\lambda}=\pm(n+\dfrac{1}{2})\pi$ (n = 0, 1, 2,…), $\cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)=0$ и суммарная амплитуда колебаний равна нулю $A^*=0$ – *это **узлы** стоячей волны*. Координаты узлов запишутся так

$$x_{\text{узл}}=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

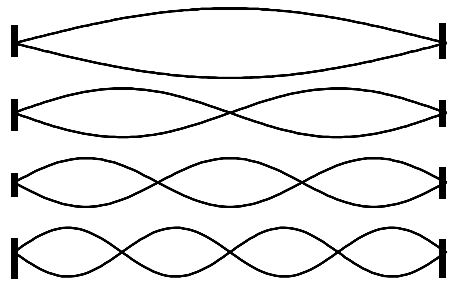
Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженных волн. На границе, где происходит отражение волны, получается пучность, если среда от которой происходит отражение менее плотная, а), и узел, если более плотная .



Если рассматривать ***бегущую волну***, то в направлении ее распространения *переносится энергия* колебательного движения. ***В случае*** же ***стоячей волны переноса энергии нет***, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.

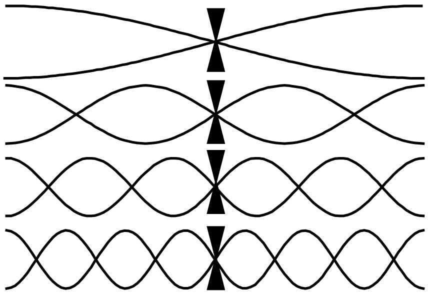
Расстояние между соседними пучностями, так же как и расстояние между соседними узлами, равно $\frac{\lambda}{2}$. Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны. Множитель $(2a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda})$ в $\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$ при переходе через нулевое значение меняет знак. В соответствии с этим фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π, т.е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Все точки, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно (т.е., в одной и той же фазе). В момент времени *t* показаны колебания, когда отклонения достигают наибольшего абсолютного значения. Далее показаны отклонения через интервалы в четверть периода. Стрелками показаны скорости частиц.

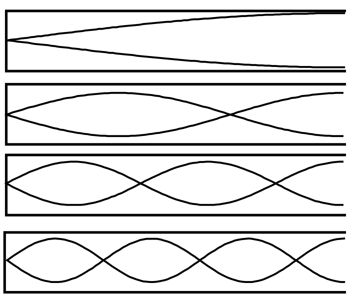
Реальная картина стоячих волн зависит от граничных условий среды. Рассмотрим струну длиной *L*, закрепленную у обоих концов, в которой взаимодействуют встречные бегущие поперечные волны (как это имеет место при возбуждении струны любого музыкального инструмента). Так как струна у концов закреплена, то там колебаний нет, и потому на концах всегда будут узлы. Возможные картины стоячих волн в такой струне показаны на рисунке. Установим важную закономерность: всякий раз на полной длине струны укладывается целое число полуволн, соответствующих распространяющейся бегущей волне. Верхняя картинка: $L = 1\cdot\frac{\lambda}{2}$, далее



$L = 2\cdot\frac{\lambda}{2}$; $L = 3\cdot\frac{\lambda}{2}$ и т.д. Вспомним, что $\lambda = V/\nu$ (где ν - частота, а *V* - фазовая скорость *бегущей* волны, связанная с плотностью материала струны ρ, массой *m*, диаметром *d* и силой натяжения *F* соотношением $V = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\pi m}}$). Тогда для общего случая получим:

$L = \frac{nV}{2\nu}$, откуда $\nu_n = \frac{nV}{2L}$, где n = 1, 2, 3, ... Последнюю формулу называют *спектром собственных частот* колебаний струны. Индекс n, присвоенный частоте, отражает тот факт, что набор частот *дискретен*, т.е. ν меняется *скачкообразно* от одного значения к другому. Если просто ущипнуть гитарную струну или провести смычком по скрипичной струне, то в сложном звуке будет преобладать *основная частота* (n = 1). Музыканты знают прием - флажолет - когда струна гитары или скрипки звучит на октаву выше[1]. Это *первая* гармоника (n = 1) основного тона[2]. Более высокие гармоники заметной амплитуды на музыкальных инструментах возбудить невозможно, однако если струну из немагнитного материала расположить между полюсами магнита, а через струну пропускать переменный ток регулируемой частоты от генератора, то возникающая сила Ампера заставит струну колебаться с частотой генератора, и если эта частота близка к одной из частот спектра ν_n, то в струне возникает резонанс, в результате чего на струне отчетливо наблюдается одна из картинок, соответствующая данной собственной частоте. Для стержня, закрепленного посредине, получим картинки, изображенные на рисунке. Посредине, где стержень закреплен, смещения нет, и там, естественно, всегда будет узел. На свободных же концах будут пучности. Поступая, как и в предыдущем случае, получим, что на стержне всякий раз укладывается нечетное число полуволн. Получим $\nu_n = \frac{(2n-1)V}{2L}$. Заметим, что в стержне могут возбуждаться не только поперечные (как в струне), но и продольные волны. Тогда картинки рисунка следует воспринимать не как наблюдаемые профили, а как графики отклонений в *продольном* направлении в данном сечении. Ведь в этом случае колебания будут происходить вдоль стержня, который сам изгибаться не будет.





Стоячие волны можно возбудить в органной трубе, закрытой у одного конца , где всегда будет узел. У открытого конца будет пучность. В отличие от стержня, здесь могут иметь место только продольные

[1] Флажолет на гитаре удается лишь хорошим музыкантам. На скрипке - совсем наоборот.

[2] К сожалению, в нумерации гармоник существует путаница. Иногда основную частоту называют первой гармоникой, первую гармонику - второй и т.д.

волны. Видно из рисунка, что на длине трубы L укладывается нечетное число четвертей длин волн, откуда $\nu_n = \frac{(2n-1)V}{4L}$. Посчитаем теперь, какую частоту может генерировать самая длинная в России органная труба длиной $L \approx 9{,}5$ *м*, находящаяся в Московском концертном зале им. П.И. Чайковского. При скорости звука $V = 340$ *м/с* для основной частоты $n = 1$ получим $\nu_1 = 9$ *Гц*. Эта частота приходится на неслышимый нами инфразвук ($0 < \nu < 20$ *Гц*), оказывающий малоизученное психологическое воздействие на организм человека: на нас сильно воздействует звук, который мы даже не слышим!

Рисунок также описывает стоячую волну (поперечную или продольную) в стержне, закрепленном у одного конца. Такие картинки можно визуально наблюдать на длинной телескопической автомобильной антенне при движении автомобиля.

Продифференцировав уравнение $\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$ по x и t, найдем закон, по которому изменяется деформация среды ε и скорость $\dot{\xi}$:

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} = -2\frac{2\pi}{\lambda}A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t \quad (1)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -2\omega A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\omega t \quad (2)$$

Уравнение (1) описывает стоячую волну деформации, а уравнение (2) стоячую волну скорости. Из вида этих уравнений следует, что узлы и пучности скорости $\dot{\xi}$ совпадают с узлами и пучностями смещения ξ; узлы и пучности деформации ε совпадают соответственно с узлами и пучностями скорости и смещения. В то время, как ξ и ε достигают максимальных значений, ξ обращается в нуль и наоборот. Соответственно дважды за период происходит превращение энергии стоячей волны из потенциальной, определяющей в основном в узлах волны (пучности деформации), в кинетическую, сосредоточенную вблизи пучностей волны (пучности скорости). В результате происходит переход энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний поток энергии в любом сечении волны равен нулю.

Итак, стоячие волны в отличие от бегущих волн не переносят энергию в пространстве.

6. Фазовая и групповая скорости волн

***Фазовая скорость** – это скорость распространения фазы волны.*

Зафиксируем, какое либо значение фазы волны и проследим, с какой скоростью фаза будет перемещаться вдоль оси x.

$$\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = \text{const},$$

это уравнение дает связь между t и тем значением x, где зафиксированное значение фазы будет в данный момент времени. Следовательно, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ – это есть ***скорость перемещения данной фазы***. Т.к. $\omega = \mathrm{const}$, поэтому $t - \frac{x}{\upsilon} = \mathrm{const}$. Возьмем производную по времени от обеих частей равенства: $1 - \frac{1}{\upsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$, отсюда получим выражение для фазовой скорости:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \upsilon .$$

Итак, *скорость распространения фазы есть скорость распространения волны.*

Т.е. υ – в уравнении волны есть ***фазовая скорость***. Для синусоидальной волны *скорость переноса энергии равна фазовой скорости*. Но синусоидальная волна не несет никакой информации, любой сигнал это модулированная волна, т.е. несинусоидальная (негармоническая).

При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Здесь нет парадокса, так как ***скорость перемещения фазы*** – *это не скорость передачи* (*распространения*) *энергии*. Энергия, масса не может двигаться со скоростью большей, чем скорость света c.

Групповая скорость

Если свойства среды не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим ***принцип суперпозиции*** (***наложения волн***)**:** *при распространении в такой среде нескольких волн, каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений частиц.*

Строго *монохроматическая* волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин».

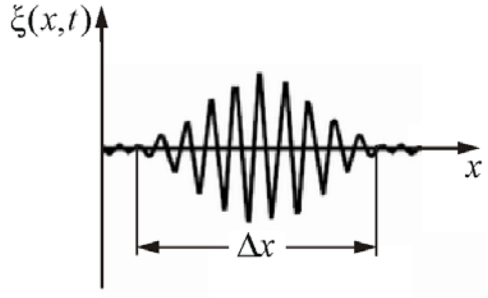
$$\xi = A\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

Фазовая скорость этой волны

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} \text{ или } \upsilon = \lambda\nu .$$

С помощью такой волны нельзя передавать сигнал, так как в любой точке волны все «горбы» одинаковы. Сигнал должен отличаться, быть знаком (меткой) на волне. Но тогда волна уже не будет описываться уравнением .

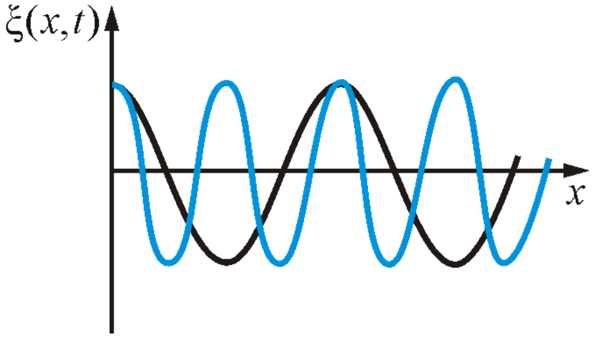
Сигнал (импульс) можно представить (согласно теореме Фурье) в виде суперпозиции гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале $\Delta\omega$. *Суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, называется* ***волновым пакетом или группой волн*** .



Выражение для группы волн:

$$\xi(x,t) = \int\limits_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \alpha_\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Этот волновой пакет может быть суммой двух волн с мало отличающимися частотами .

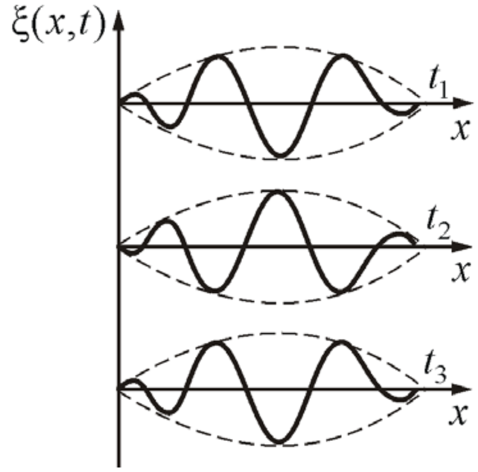


Там где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

Чтобы суперпозицию можно было считать группой волн, необходимо условие $\Delta\omega << \omega_0$.

Дисперсия *– это зависимость фазовой скорости в среде от частоты.*

В *недиспергирующей среде* все плоские волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью υ. Очевидно, что в данном случае скорость перемещения пакета совпадает со скоростью υ. В *диспергирующей среде*, каждая волна диспергирует со своей скоростью, пакет с течением времени расплывается, его ширина увеличивается. Если *дисперсия невелика*, то расплывание не происходит слишком быстро и пакету можно приписать скорость *u*.



Скорость, с которой перемещается центр пакета (*точка с максимальным значением A*), *называется* ***групповой скоростью*** *u*.

В диспергирующей среде $u \neq \upsilon$. Вместе с движением самого пакета происходит движение горбов внутри пакета. «Горбы» перемещаются со скоростью υ, а пакет в целом с *u*.

Рассмотрим это подробнее на примере суперпозиции двух волн с одинаковой амплитудой и разными длинами волн λ.

Уравнения волн (при начальной фазе $\varphi = 0$) запишутся так:

$$\xi_1 = A\ \cos(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad \xi_2 = A\ \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

здесь $k = \dfrac{\omega}{\upsilon_1}$; $(k + \Delta k) = \dfrac{\omega + \Delta\omega}{\upsilon_2}$, т.к. $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\upsilon T} = \dfrac{\omega}{\upsilon}$.

Пусть $\Delta\omega << \omega$, соответственно $\Delta k << k$.

Сложим колебания, применив преобразования для суммы косинусов: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$$\xi = 2A\left[\cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + \Delta\omega t - kx - \Delta kx}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - \Delta\omega t + kx + \Delta kx}{2}\right)\right] =$$

$$2A\cos\left(\frac{2\omega t - 2kx}{2}\right)\cos\left(\frac{-\Delta\omega t + \Delta kx}{2}\right), \text{ т.к. } \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \text{ то}$$

$$\xi = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right]\cos(\omega t - kx).$$

Множитель в квадратных скобках изменяется с *t* и *x* значительно медленнее, чем второй множитель, следовательно, выражение можно рассматривать как уравнение плоской волны с амплитудой

$$A = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right|.$$

Результирующая амплитуда получается в результате сложения, следовательно, будут *максимумы и минимумы амплитуды*. Максимум амплитуды будет определяться условием

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_{\max} = \pm m\pi,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, x_{\max}$ – координата максимума амплитуды.

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн. Разрешив уравнение относительно $x_{\max}$ получим:

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \text{const}; \quad (2m\pi = \text{const}).$$

Так как $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$ – фазовая скорость, то $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} = u$ – групповая скорость.

С такой скоростью перемещается максимум амплитуды. В пределе, выражение для групповой скорости

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}.$$

Это выражение справедливо для центра группы произвольного числа волн. Выражению для групповой скорости можно придать другой вид. Т.к $\omega = \upsilon k$, следовательно

$$u = \frac{\mathrm{d}(\upsilon k)}{\mathrm{d}k} = \upsilon + k\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}k}.$$

Выразим $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}k}$ через длину волны λ:

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}k}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}k} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$$

следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}k} = -\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\lambda}{k}, \text{ тогда получим}$$

$$u = \upsilon - \lambda\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Из этой формулы следует, что в диспергирующей среде, в зависимости от знака $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda}$, групповая скорость может быть больше или меньше фазовой.

В отсутствие дисперсии $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda} = 0$ и $u = \upsilon$. Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому скорость переноса энергии равна групповой скорости.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что *поглощение энергии волны* в среде *невелико*. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Это случай из области аномальной дисперсии (рассмотрим позже).

7. Звуковые волны

Упругие волны, имеющие частоту в пределах от 16 до 20000*Гц*, при распространении в воздухе, достигнув человеческого уха, вызывает ощущение звука. В соответствии с этим упругие волны в любой среде, имеющие частоту, лежащую в указанных пределах, называются звуковыми волнами или просто звуком. Упругие волны с частотами, меньше 16*Гц*, называются инфразвуком, волны с частотами, превышающими 2000*Гц*, называются ультразвуком. Инфра и ультразвуки человеческое ухо не слышит.

Звуковая волна в газах и жидкостях может быть только продольной и состоит из чередующихся сжатий и разряжений среды. В твердых телах могут распространяться как продольные, так и поперечные волны.

Воспринимаемые звуки люди различают по высоте, тембру и громкости.

Всякий реальный звук представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением гармонических колебаний с определенным набором частот, который называется акустическим спектром данного звука. Если в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале от ν' до ν'' то спектр называется сплошным (шум). Если звук состоит из колебаний дискретных частот ν_1, ν_2, ν_3 и т.д., то спектр называется линейчатым. Колебания с линейчатым спектром вызывает ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называется тональным. Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой. Относительная интенсивность обертонов (т.е. колебаний с частотами ν_2, ν_3 и т.д.) определяет окраску или тембр звука.

Под интенсивностью звука понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, которую несет с собой звуковая волна. Чтобы вызвать звуковые ощущения, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, которая называется порогом слышимости. Наиболее чувствительно человеческое ухо к частотам от 1000 до 4000*Гц*. В этой области частот порог слышимости составляет в среднем около $10^{-12}\frac{Вт}{м^2}$. При интенсивности порядка $1-10\frac{Вт}{м^2}$ волна не воспринимается как звук, а вызывает в ухе лишь ощущение боли и давления (порог болевого ощущения).

Субъективно оцениваемая громкость звука возрастает гораздо медленнее, чем интенсивность звуковых волн. При возрастании интенсивности в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т.е. линейно. На этом основании уровень громкости L определяется как логарифм отношения интенсивности данного звука I к интенсивности I_0, принятой за исходную ($I_0 = 10^{-12}\frac{Вт}{м^2}$):

$$L = \lg\frac{I}{I_0}$$

Единица уровня громкости L, определяемого формулой $L = \lg\frac{I}{I_0}$, называется белом (B). Обычно пользуются в 10 раз меньшими единицами децибелами (∂B). Значение L в децибелах определяется формулой:

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}$$

Отношение двух интенсивностей I_1 и I_2 также может быть выражено в децибелах:

$$L_{12} = 10\lg\frac{I_2}{I_1}$$

с помощью этой формулы может быть выражено децибелах уменьшение интенсивности (затухание) волны на некотором пути. Так, например, затухание в 20 ∂B означает, что интенсивность уменьшается в 100 раз. Весь диапазон интенсивности, при которых волна вызывает в человеческом ухе ощущение (от10^{-12} до $10\frac{Bm}{м^2}$), соответствует значениям уровня громкости от 0 до 130 ∂B. Так, например, тиканье часов -20∂B, тихий разговор -40∂B, громкая речь -70∂B, крик -80∂B, шум самолетного мотора: на расстоянии 5$м$ -120∂B, на расстоянии 3$м$-130 ∂B.

Энергия, которую несет с собой звуковая волна, крайне мала. Например, если стакан с водой поглощает всю падающую на него энергию звуковой волны с уровнем громкости 70∂B, то количество поглощаемой в секунду энергии будет составлять примерно $2\cdot10^{-7}$ Bm.

Звуковая волна состоит из перемещающихся областей сгущения и разряжения газа. Давление газа в области сгущения больше, а в области разряжения меньше среднего давления P_0. В каждой точке, через которую проходит волна, давление колеблется около среднего значения с амплитудой ΔP. Можно показать, что интенсивность волны связана с амплитудой колебания давлений следующим соотношением:

$$I = \frac{(\Delta P)^2}{2\rho\upsilon},$$

где ρ - плотность газа, υ- скорость волны.

Пусть смещение ξ изменяется по закону: $\xi = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$, тогда:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = Ak\sin(\omega t - kx + \alpha) = A\frac{\omega}{\upsilon}\sin(\omega t - kx + \alpha)$$

Величина $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \varepsilon$ характеризует собой деформацию выделенного газового объема. По аналогии с твердым телом, можно записать, что $\varepsilon = \alpha\frac{f}{S}$,

где $\frac{f}{S}$- приращение давления газа ΔP. Учитывая, что $\alpha = \frac{1}{\gamma P}$ - коэффициент упругости,

напишем:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \alpha\frac{f}{S} = \frac{\Delta P}{\gamma P} = A\frac{\omega}{\upsilon}, \text{ или } \Delta P = \frac{A\gamma P\omega}{\upsilon}.$$

Откуда:

$$A = \frac{\Delta P\upsilon}{\gamma P\omega}.$$

Подставляя $A = \frac{\Delta P\upsilon}{\gamma P\omega}$, получим:

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon = \frac{1}{2}\frac{\rho(\Delta P)^2\upsilon^2\omega^2\upsilon}{\gamma^2 P^2\omega^2} = \frac{1}{2}\rho\frac{\Delta P^2\upsilon^4}{\gamma^2 P^2\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{\rho\Delta P^2\gamma^2}{\gamma^2 P^2\upsilon}\left(\frac{P}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta P^2}{\rho\upsilon}$$

(так как $\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, то $\upsilon^4 = \frac{\gamma^2 P^2}{\rho^2}$).

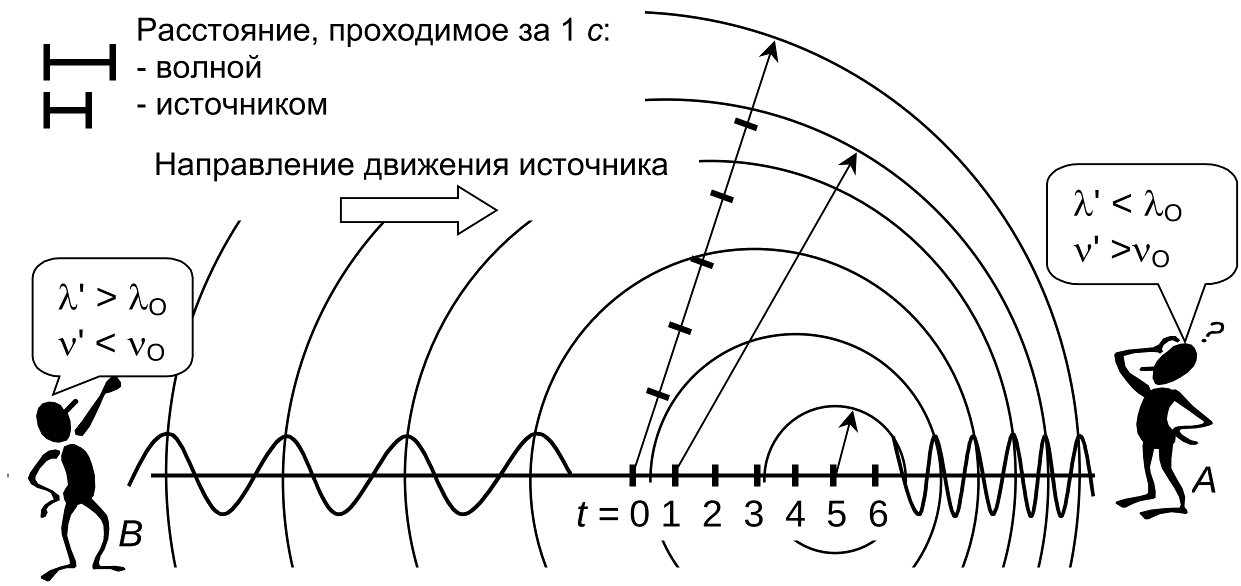
Итак, после некоторых преобразований приходим к формуле $I = \frac{\Delta P^2}{2\rho\upsilon}$. С помощью этой формулы можно вычислить, что диапазону уровней громкости от 0 до $130\,\partial B$ соответствуют примерные значения амплитуды колебаний давления воздуха от $3\cdot 10^{-5}$ *Па* (т.е. $2\cdot 10^{-7}$ *мм рт.ст.*) до 100*Па* (≈ 1*мм рт.ст.*).

8. Эффект Доплера

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда, его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким, чем сигнал того же электропоезда, но неподвижного. Это явление теоретически было обосновано в 1824 г. австрийским физиком Х. Доплером.

Доплер Кристиан (1803 – 1853), австрийский физик и астроном, член Венской АН (1848 г.). Учился в Зальцбурге и Вене. С 1847 г. профессор Горной академии в Хемнице, с 1850 г. профессор Политехнического института и университета в Вене. Основные труды посвящены аберрации света, теории микроскопа и оптического дальномера, теории цветов и др. В 1842 г. теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения наблюдателя относительно источника колебаний.

Эффект Допплера - очень интересное волновое явление, которое в последнее время стало играть важную роль и в инженерном деле. Он был открыт в 1825 г.[3] и заключается в том, что частота сигнала, который посылается некоторым источником отличается от частоты, которая принимается некоторым приемником, если источник или приемник (или оба вместе) движутся. В оригинальном эксперименте Допплера к наблюдателю с абсолютным слухом, находившемуся на перроне вокзала, приближалась, а затем удалялась от него открытая железнодорожная платформа с духовым оркестром. Музыканты выдували одну и ту же ноту, которую неподвижный наблюдатель определял на слух. При приближении платформы обнаруживалось повышение частоты тона, а при удалении - понижение. Это явление наблюдается и для упругих, и для электромагнитных волн, однако описывается по-разному, поскольку упругие волны распространяются всегда в среде, а ЭМ волны могут распространяться и в вакууме. Начнем с упругих волн. В этом случае говорят об эффекте Допплера в акустике.



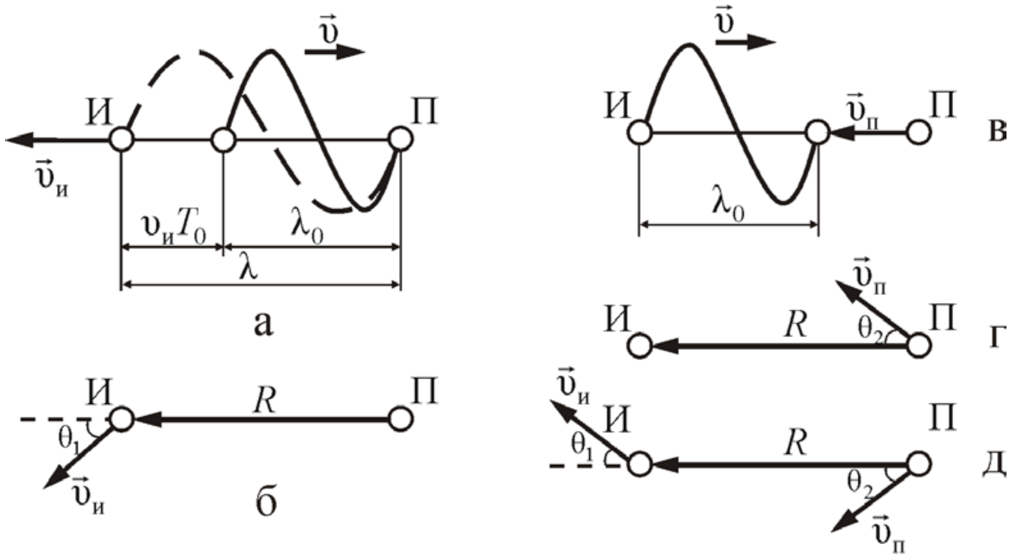
***Эффектом Доплера** называется изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих вол и приемника.*

[3] Родным городом Х. Допплера, как и В. Моцарта, является австрийский Зальцбург.

Данный эффект наблюдается при распространении звуковых волн (акустический эффект) и электромагнитных волн (оптический эффект).

Рассмотрим несколько случаев проявления ***акустического эффекта Доплера***.

Пусть приемник звуковых волн П в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется от приемника со скоростью $\vec{\upsilon}_и$ вдоль соединяющей их прямой.



Источник смещается в среде за время, равное периоду T_0 его колебаний, на расстояние $\upsilon_и T_0 = \dfrac{\upsilon_и}{\nu_0}$, где ν_0 – частота колебаний источника. Поэтому при движении источника длина волны в среде λ отлична от ее значения λ_0 при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + \upsilon_и T_0 = (\upsilon + \upsilon_и)T_0 = \frac{(\upsilon + \upsilon_и)}{\nu_0},$$

где υ – фазовая скорость волны в среде.

Частота волны, регистрируемая приемником,

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \upsilon_и / \upsilon}.$$

Если вектор $\vec{\upsilon}_и$ скорости источника направлен под произвольным углом θ_1 к радиус-вектору $\vec{R}$, соединяющему неподвижный приемник с источником, то

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (\upsilon_и / \upsilon)\cos\theta_1}.$$

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью $\vec{\upsilon}_п$ вдоль соединяющей их прямой, то длина волны в среде $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{\upsilon}{\nu_0}$. Однако, скорость распространения волны относительно приемника равна $\upsilon + \upsilon_п$, так что частота волны, регистрируемая приемником

$$\nu = (\upsilon + \upsilon_п)/\lambda_0 = \nu_0(1 + \upsilon_п/\upsilon).$$

В том случае, когда скорость $\vec{\upsilon}_п$ направлена под произвольным углом θ_2 к радиус-вектору $\vec{R}$, соединяющему движущийся приемник с неподвижным источником, то имеем:

$$\nu = \nu_0[1 + (\upsilon_п/\upsilon)\cos\theta_2].$$

В самом общем случае, когда и приемник, и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольным скоростями ,

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + (\upsilon_п/\upsilon)\cos\theta_2}{1 + (\upsilon_и/\upsilon)\cos\theta_1}.$$

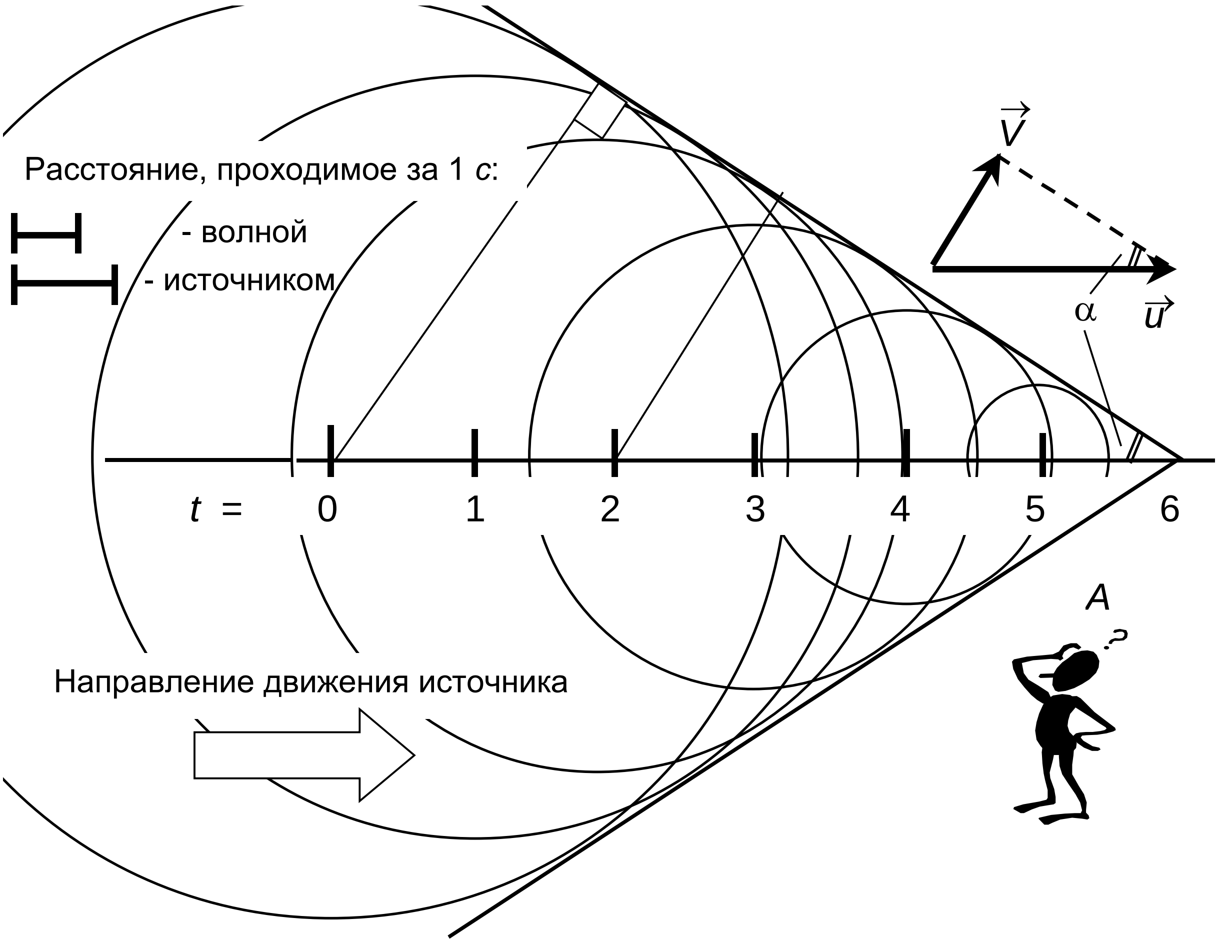
Эту формулу можно также представить в виде (если $\upsilon_и << \upsilon$)

$$\nu \approx \nu_0[1 - (\upsilon'/\upsilon)\cos\theta],$$

где $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_и - \vec{\upsilon}_п$ – скорость источника волны относительно приемника, а θ – угол между векторами $\vec{\upsilon}'$ и $\vec{R}$. Величина $\upsilon'\cos\theta$, равная проекции $\vec{\upsilon}'$ на направление $\vec{R}$, называется ***лучевой скоростью источника.***

Ударные волны Маха образуются, когда скорость источника превышает скорость звука ($u > V$). Как и прежде рассмотрим волновую картину через 6 *с* после начала колебаний. Выполняя аналогичные построения, получим картину, изображенную на рисунке. Как видно из построения, получается волна, фронт которой образует увеличивающийся в размерах конус с углом раствора $\alpha = \arcsin(V/u)$. Это так называемая ударная волна Маха[4]. Такую волну порождает взмах хлыстом или движение самолета со сверхзвуковой скоростью. Наблюдатель при этом слышит громкий хлопок. Часто говорят, что самолет "преодолевает звуковой барьер", хотя на самом деле он мог его преодолеть вскоре после взлета и далее двигаться с постоянной скоростью $u > V$.

[4] Э. Мах (1838-1916) - выдающийся австрийский физик, подвергшийся за субъективный идеализм беспощадному разгрому в главном философском произведении В.И. Ленина "Материализм и эмпириокритицизм" (см. любое издание). Его теория ударных волн не входила в советские учебные программы и рассматривалась лишь в спецкурсах без ссылки на первоисточник.



Два наблюдателя, находящиеся поодаль друг от друга услышат хлопок, естественно, в разное время - по мере достижения образующей конуса барабанных перепонок. Аналогом этой волны является поверхностная волна на воде с "треугольным" фронтом, возбуждаемая катером.

Оптический эффект Доплера

Рассмотрим теперь эффект Допплера для ЭМ волн. Так как ЭМ волны могут распространяться в пустом пространстве и, в отличие от упругих волн, не нуждаются в наличии некоей среды - *эфира* - то имеет смысл говорить лишь об *относительной* скорости *U* приемника по отношению к источнику (или наоборот, что одно и то же). Пусть имеется условно неподвижная система *K* и движущаяся относительно нее равномерно со скоростью *U* система *K′*, у которой ось x' скользит вдоль оси x системы *K*, а $y = y'$ и $x = x'$. Пусть далее с системой *K* связан источник, посылающий плоскую волну

$$E(x,t) = E_o \cos(\omega_o t - kx) = E_o \cos[2\pi\nu_o(t - \frac{x}{c})],$$

а с *K′* связан приемник, воспринимающий волну

$$E(x',t') = E_o \cos[2\pi\nu'(t' - \frac{x'}{c})].$$

Подставляя преобразования Лоренца, имеющие вид $x = \dfrac{x' + Ut'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$; $t = \dfrac{t' + \frac{Ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$, получим

$$E(x,t) = E_o \cos\left[2\pi\nu_o\left(\frac{t' + \frac{Ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} - \frac{x' + Ut'}{c\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}\right)\right] \equiv E_o \cos\left[\underbrace{\frac{2\pi\nu_o\left(1 - \frac{U}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}}_{2\pi\nu'}\left(t' - \frac{x'}{c}\right)\right]$$ и

поэтому коэффициент перед $\left(t' - \dfrac{x'}{c}\right)$ есть не что иное как круговая частота $\omega' = 2\pi\nu'$ Таким образом

$$2\pi\nu' = 2\pi\nu_o \frac{1 - \frac{U}{c}}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \equiv 2\pi\nu_o \frac{c - U}{\sqrt{(c - U)(c + U)}} \equiv 2\pi\nu_o \sqrt{\frac{c - U}{c + U}}.$$

При этом система K' (с неподвижным в ней приемником) *удалялась* от системы K (с неподвижным источником). Если считать, как ранее в акустическом случае, что $U > 0$ для сближения и $U < 0$ для удаления, то в последней формуле следует поменять U на $(-U)$. Окончательно

$$\nu' = \nu_o \sqrt{\frac{c + U}{c - U}}.$$

Анализ линий спектра излучения удаленных космических объектов показывает, что положение этих линий сдвинуто в сторону бóльших длин волн. Явление это называют *красным смещением*. По-видимому, оно подтверждает гипотезу Фридмана[5] о расширяющейся Вселенной. Согласно этой гипотезе, Вселенная образовалась в результате большого взрыва, и находится в состоянии расширения, которое затем должно смениться сжатием. Если такое расширение имеет в настоящий момент место, то удаление излучающего объекта (например, звезды Альфа Центавра) от наблюдателя будет сопровождаться

[5] А.А.Фридман (1888-1925) - советский физик, впервые выдвинувший гипотезу о расширяющейся вселенной. Американский астроном Хаббл дополнил гипотезу идеей о начальном *большом взрыве (Big Bang)*.

уменьшением частоты (увеличением длины волны) в соответствии с $\nu' = \nu_O \sqrt{\dfrac{c+U}{c-U}}$.

Эффект Допплера обусловливает естественную ширину спектральных линий. В самом деле, неподвижная молекула должна была бы излучать узкую спектральную линию частоты ν_O. Однако молекулы совершают хаотическое тепловое движение с некоторой средней тепловой скоростью *U* относительно спектрографа, который здесь играет роль приемника. Поскольку при хаотическом движении молекулы все направления равновероятны, то с одинаковой вероятностью она может двигаться как от спектрографа, так и по направлению к нему. Поэтому в (13.5) перед *U* возможны оба знака. Таким образом, ширина спектральной линии, зарегистрированной спектрографом, определится интервалом $\Delta\nu = \left(\nu_O \sqrt{\dfrac{c-U}{c+U}}\ ,\ \nu_O \sqrt{\dfrac{c+U}{c-U}} \right)$, обусловливающим допплеровское уширение спектральной линии ν_O. Таким образом, наличие допплеровского уширения $\Delta\nu$ обусловливает принципиальный естественный предел совершенствованию спектрометрической техники, преодолеть который невозможно никаким повышением качества проектируемых инженерных приборов.

Эффект Допплера используется в арсенале ГИБДД в приборе для определения скорости *U* движущегося автомобиля. В этом случае $U/c \ll 1$. Представим корень в $\nu' = \nu_O \sqrt{\dfrac{c+U}{c-U}}$ как $\sqrt{\dfrac{c+U}{c-U}} \equiv \sqrt{1+\dfrac{U}{c}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{U}{c}}}$

и воспользуемся разложениями в ряд по $\dfrac{U}{c}$:

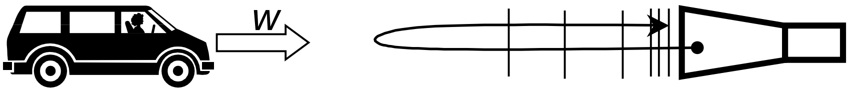
$\sqrt{1+\dfrac{U}{c}} \approx 1+\dfrac{U}{2c}+\dots$ и $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{U}{c}}} \approx 1+\dfrac{U}{2c}+\dots$. Только первые два слагаемых в этих разложениях одинаковы. Остальные, которые отличаются друг от друга, - меньшего порядка, и мы их отбрасываем. Поэтому для малых *U* получим для частоты ν', воспринимаемой водителем, значение

$$\nu' \approx \nu_O \left(1+\frac{U}{2c}\right)^2 \approx \nu_O \left(1+\frac{U}{c}\right) \quad . \qquad (13.6)$$

Сигнал этой частоты отражается назад к сотруднику ГИБДД и воспринимается его радаром как сигнал, идущий от движущегося источника – автомобиля. Воспринимаемая гаишником частота ν'' опять-таки определится формулой (13.6), где вместо ν_o надо теперь подставить ν'. Поэтому

$$\nu'' = \nu'\left(1+\frac{U}{c}\right) = \nu_O \left(1+\frac{U}{c}\right)^2 \approx \nu_O \left(1+\frac{2U}{c}+\dots\right) .$$

Для нахождения скорости автомобиля (рис. 13.7) используется радар, излучающий электромагнитные волны длины λ_O = 3 *см* ($\nu_O = c/\lambda = 10^{10}$ *Гц*). Радар одновременно является и источником, посылающим излучение частоты ν_O, и приемником, регистрирующим отраженное излучение частоты ν”. Как следует из последнего соотношения, разность частот посланного и принятого сигнала $\delta\nu = \nu'' - \nu_O = 2\nu_O U/c$, отсюда $U = c\ \delta\nu/(2\nu_O)$. В результате взаимодействия коллинеарных колебаний с близкими частотами ν” и ν_O возникнут биения с частотой δν (см. ЛЕКЦИЮ 4). Современные, не слишком дорогие приборы, которыми оснащены службы ГИБДД, способны обнаружить биения с частотой не менее 100 *Гц*. Таким образом, минимально возможная обнаружимая скорость равна



$$U_{\min} = \frac{3\cdot 10^8 \cdot 100}{2\cdot 10^{10}} = 1{,}5\ м/с = 5{,}4\ км/ч.$$

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается ***продольный эффект Доплера***.

В случае сближения источника и приемника ($\theta = \pi$)

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}} > \nu_0,$$

а в случае их взаимного удаления ($\theta = 0$)

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}} < \nu_0.$$

Кроме того, из релятивистской теории эффекта Доплера, следует существование ***поперечного эффекта Доплера***, наблюдающегося при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, т.е. в тех случаях, когда источник движется перпендикулярно линии наблюдения (например, источник движется по окружности, приемник в центре):

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} < \nu_0.$$

Поперечный эффект Доплера необъясним в классической физике. Он представляет чисто релятивистский эффект.

Как видно, поперечный эффект пропорционален отношению υ^2/c^2, следовательно, он значительно слабее продольного, который пропорционален υ/c.

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на составляющие, одна обеспечивает продольный другая поперечный эффекты.

Существование поперечного эффекта Доплера следует непосредственно из замедления времени в движущихся системах отсчета.

Впервые экспериментальная проверка существования эффекта Доплера и правильности релятивистской формулы была осуществлена американскими физиками Г. Айвсом и Д. Стилуэллом в 30-ых гг. Они исследовали с помощью спектрографа излучения пучка атомов водорода, разогнанных до скоростей $2 \cdot 10^6$ м/с. В 1938 г. результаты были опубликованы. Резюме: поперечный эффект Доплера наблюдался в полном соответствии с релятивистскими преобразованиями частоты (спектр излучения атомов оказался сдвинут в низкочастотную область); вывод о замедлении времени в движущихся инерциальных системах отсчета подтвержден.

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости $\upsilon' \cos\theta$ этих объектов по отношению к Земле: при $\upsilon << c$ по формуле

$$\upsilon' \cos\theta \approx (1 - \nu / \nu_0) c \,.$$

Американский астроном Э. Хаббл обнаружил в 1929 г. явление, получившее название ***космологического красного смещения*** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн). Оказалось, что для каждого объекта относительное смещение частоты $z = (\nu_0 - \nu) / \nu_0$ (ν_0 – частота линии в спектре неподвижного источника, ν – наблюдаемая частота) совершенно одинаково по всем частотам. Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики. Под метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен $R = 1{,}12 \cdot 10^{23}$ км. Существование этого явления было теоретически предсказано еще в 1922 г. советским ученым А.А. Фридманом на основе развития общей теории относительности.

Хаббл установил закон, согласно которому, ***относительное красное смещение z галактик растет пропорционально расстоянию r до них***.

Закон Хаббла можно записать в виде:

$$\upsilon \cos\theta \approx cz = Hr \,,$$

где H – постоянная Хаббла. По самым современным оценкам, проведенным в 2003 г., $H = 73{,}2$ км/(с $\cdot$ Мпк). (1 пк (парсек) – расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет ($1\,\text{пк} \approx 3{,}09 \cdot 10^{16}$ м)).

В 1990 г. на борту шаттла «Дискавери» был выведен на орбиту космический телескоп имени Хаббла .

Астрономы давно мечтали о телескопе, который работал бы в видимом диапазоне, но находился за пределами земной атмосферы, сильно мешающей наблюдениям. «Хаббл» не только не обманул возлагавшихся на него надежд, но даже превзошел практически все ожидания. Он фантастически расширил «поле зрения» человечества, заглянув в немыслимые глубины Вселенной. За время своей работы космический телескоп передал на землю 700 тыс. великолепных фотографий. При помощи телескопа , в частности, астрономы определили точный возраст нашей Вселенной – 13,7 млрд. лет. Он помог подтвердить существование во Вселенной странной, но оказывающей огромное влияние, формы энергии – темной энергии. Было доказано существование сверхмассивных черных дыр. При помощи телескопа удивительно четко было заснято падение кометы на Юпитер. Показано, что процесс формирования планетных систем является широко распространенным в нашей галактике, обнаружены небольшие прото галактики, по регистрации излучения, испускаемое ими, когда возраст Вселенной составлял менее 1 млрд. лет.

На эффекте Доплера основаны радиолокационные лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.). Лазерная анемометрия является незаменимым методом изучения потока жидкости или газа. Хаотическое тепловое движение атомов светящегося тела также вызывает уширение линий в его спектре, которое возрастает с увеличением скорости теплового движения, т.е. с повышением температуры газа. Это явление можно использовать для определения температуры раскаленных газов.