# §8.Странные аттракторы

В прошлых разделах мы изучали динамические системы, аттракторы которых являлись неподвижными точками или предельными циклами. Предельный цикл, напомним, может существовать в *нелинейных* системах ОДУ, число уравнений в которой $N \geq 2$.

В динамических системах, которые включают три и более уравнений, могут существовать еще более необычные аттракторы, которые принято называть *странными*. Эти странные аттракторы являются решением некоторых динамических систем, в которые входят нелинейные члены.

## *Пример: модель Лоренца*

Первая из динамических систем со странным аттрактором была предложена в качестве модели турбулентности в 1963 году американским метеорологом Э.Лоренцем:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \sigma(y - x), \\ &\dot{y} = -xz + \mu x - y, \\ &\dot{z} = xy - bz. \end{aligned} \qquad (70)$$

В модели Лоренца присутствуют три неизвестных функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, а также несколько параметров. Главным для нас будет параметр $\mu$. При плавном изменении этого параметра динамическая система будет менять тип своего аттрактора. При одних значениях параметра $\mu$ система будет иметь устойчивую предельную точку, а при других значениях $\mu$, больших некоторого бифуркационного значения $\mu^*$, система будет иметь совершенно невероятное решение.

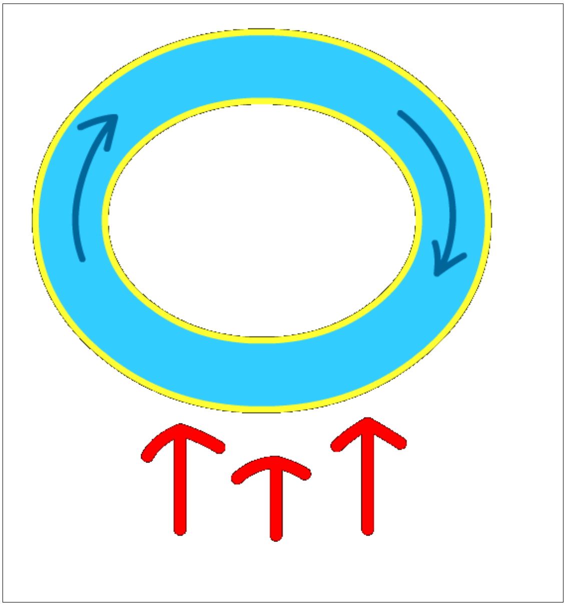

*__Рис. 40.__ Упрощенная физическая модель для системы ОДУ (47)*

Скажем несколько слов теперь о физическом смысле динамической системы Лоренца. Изначально, Лоренц вывел свои уравнения для моделирования движения жидкости в запаянной трубке (рис. 40). Сильно упрощая его представление, можно сказать, что неизвестные функции x(t), y(t) и z(t) являются гидродинамическими параметрами, характеризующими движение жидкости. Для простоты, будем считать их средними скоростями движения жидкости в трубке (хотя, на самом деле, это не совсем так). Бифуркационный параметр $\mu$ имеет смысл числа Рэлея. Если трубка подогревается снизу, то температура жидкости будет увеличиваться, что отвечает увеличению параметра $\mu$.

При некотором градиенте температур в трубке установится конвективное движение жидкости. Жидкость начнет двигаться в какую-либо сторону по трубке. Теплая жидкость будет всплывать, а холодная – спускаться вниз. При небольшом градиенте температур эта конвекция будет ламинарной, т.е. протекать с постоянной скоростью. Как несложно догадаться, такому ламинарному режиму конвекции соответствует устойчивый узел решения системы Лоренца (рис. 41-42).

Вне зависимости от начальных условий после короткого периода релаксации система переходит в стационарное состояние, описывающее ламинарный режим конвекции, т.е постоянную скорость циркуляции жидкости по трубке.

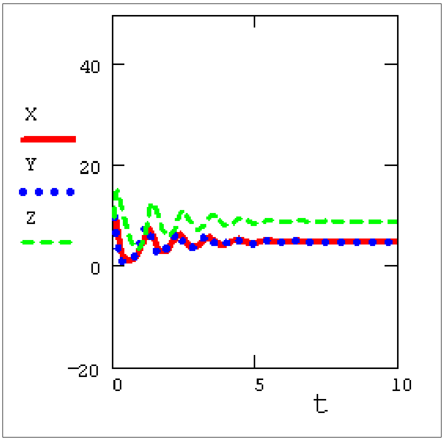


**Рис. 41.** *Растровые графики решения (70) с $\mu$=10 - фокус*

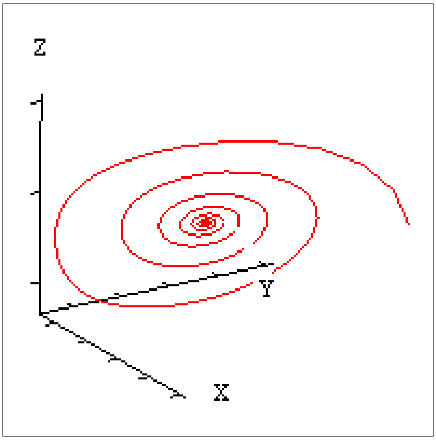


**Рис. 42.** *Решение (70) в фазовом пространстве (фокус)*

Система Лоренца замечательна тем, что предлагает модель ламинарно-турбулентного перехода при конвективных движениях жидкости. Если градиент температуры превышает некоторый порог, т.е. $\mu$ увеличивается до сверхбифуркационного значения, то происходит переход от ламинарного движения жидкости к турбулентному. С точки зрения нелинейной динамики это означает переход от особой точки типа узла, к другому, совершенно необычному режиму, который называется *странным аттрактором* или *аттрактором Лоренца*.

Решение системы уравнений Лоренца (70) при значении параметра $\mu$, превышающем бифуркационное, выглядит почти идентично классическому случайному процессу (рис.43 и 44). В определенном смысле, аттрактор Лоренца является стохастическими автоколебаниями, поддерживаемыми в динамической системе за счет внешнего источника. В фазовом пространстве странный аттрактор имеет топологию некоторого клубка траекторий, в пределах которого можно выделить две области. В каждый момент времени решение находится в одной из этих областей, причем смена состояний системы в одну или другую область является совершенно непредсказуемой ( ри всех значениях времени t).

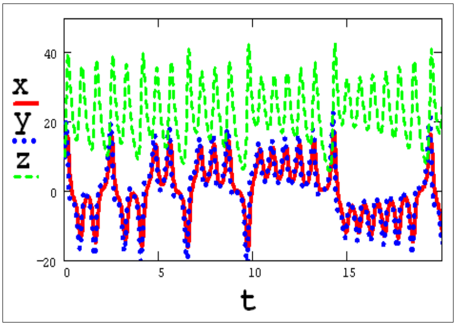


***Рис. 43.*** *Странный аттрактор – решение (70) с параметрами (10, 27, 8/3)*

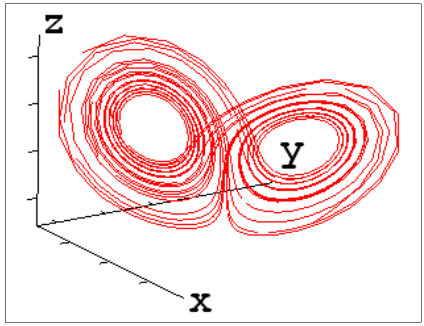


***Рис. 44.*** *Странный аттрактор в фазовом пространстве*

Асимптотического поведения системы Лоренца при t→∞ нет. Независимо от выбора начальных условий, уравнения Лоренца имеют решение, топология которого показана на рис. 43–44. Такое решение является замечательной моделью турбулентной конвекции. Скорость течения жидкости в трубке с большим градиентом температуры хаотически осциллирует от одного момента времени к другому. Таким образом, модель Лоренца хорошо описывает, как турбулентное движение при конвективном движении жидкости в трубке, так и сам ламинарно-турбулентный переход, происходящий при некотором критическом градиенте температур.

Еще одно замечательное свойство странных аттракторов, в частности аттрактора Лоренца, – это чувствительность к начальным условиям. Как Вы помните, аттракторы, которые мы изучали раньше, т.е. неподвижные точки и предельные циклы, характеризовались тем, что для различных начальных условий семейства решений сходились к одному асимптотическому решению. Иначе говоря, различные траектории, вышедшие из различных точек, соответствующих различным начальным условиям, сходились при t→∞ в одну точку или близкие кривые. Поэтому поведение обычных систем, имеющих аттракторы вблизи неподвижных точек и предельных циклов, на больших временах хорошо предсказуемо. Со странными аттракторами все совсем не так. Какие бы близкие начальные условия мы ни брали, при $t \to \infty$ решения будут расходиться, удаляясь друг от друга в фазовом пространстве.

Поскольку в реальных задачах начальные условия известны с некоторой погрешностью (или, по крайней мере, считаются на компьютере с некоторой погрешностью округления), совершенно невозможно указать поведение странного аттрактора при достаточно большом времени t, поэтому поведение систем, описывающихся странными аттракторами, совершенно непредсказуемо. Как отмечал сам Лоренц, именно с таким разбеганием траекторий динамической системы может быть связана принципиальная невозможность прогнозирования погоды на несколько недель вперед.

## ***Пример: динамо Рикитаке***

После того, как Лоренц придумал свою систему уравнений, начали появляться новые модели с решениями в виде странных аттракторов. Приведем (без дополнительных комментариев) еще одну классическую динамическую систему, предложенную Рикитаке для моделирования хорошо известного в геофизике явления – непредсказуемого переворота магнитного поля Земли:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu x + yz, \\ \dot{y} &= -\mu y + xw, \\ \dot{z} &= 1 - xy - \sigma_1 z, \\ \dot{w} &= 1 - xy + \sigma_2 w. \end{aligned} \qquad (71)$$

Соответствующее решение в виде странного аттрактора изображено на рис. 45 и 46.

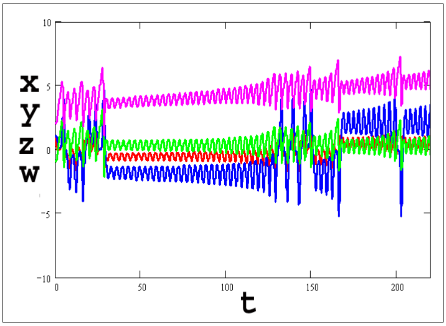


*Рис. 45* *Растровые графики решения системы уравнений Рикитаке*

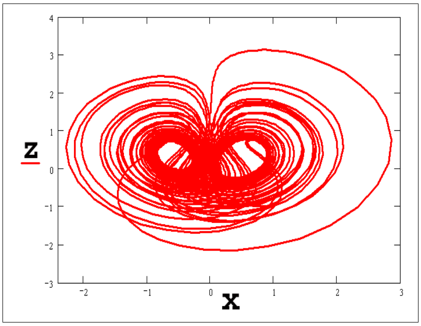


***Рис. 46.*** *Странный аттрактор – решение уравнений Рикитаке*

Итак, мы увидели, что неподвижные точки являются простейшими, но не единственными представителями аттракторов динамической системы. Помимо решений системы N ОДУ, асимптотически стремящихся к некоторой точке в N-мерном фазовом пространстве, бывают решения, представляющие собой колебания различного типа. Среди них можно выделить три класса решений (два из которых нам уже встречались), обладающие существенно разными свойствами:

1. обычные незатухающие *колебания*, описываемые негрубыми системами ОДУ (например, незатухающий осциллятор или модель Вольтерра) – фазовый портрет зависит от начальных условий и представляет собой замкнутые линии в фазовом пространстве с одной неподвижной точкой типа центр;

2. *автоколебания* – решение системы ОДУ, которое, независимо от начальных условий, стремится к определенной замкнутой линии в фазовом пространстве, называемой *предельным циклом* (модели Хопфа, Ван-дер-Поля, брюсселятора и трехвидовой конкуренции);

3. *«стохастические» колебания* – «странный» аттрактор (например, Лоренца и Рикитаке).