ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Лекция 7. Динамика вращательного движения (часть 1)

1. Момент силы.
2. Момент импульса.
3.Закон изменения момента импульса частицы.
4. Закон сохранения момента импульса.
5. Основное уравнение динамики вращательного движения.

1. Момент силы.

Ясно, что закручивать гайку ключом с длинной ручкой легче, чем с короткой (рис. 7.1). Из этого следует, что кроме модуля силы и ее направления, есть и другая величина − точка приложения силы, характеризующая движение (в данном случае это вращательное движение). Для обозначения этой величины используется момент силы.

Рис.7.1

Момент силы относительно точки О − это вектор $\vec{M}$, модуль которого равен

$$M = Fl = Fr\sin\alpha, \tag{7.1}$$

а направление его перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рис. 7.2).

Получается, что момент силы можно представить в виде векторного произведения радиус-вектора (проведенного в точку приложения силы из точки *O*, выбранной в данном случае за начало координат) и силы $\vec{F}$

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{7.2}$$

Зная свойства векторного произведения, можно заметить, что направление момента силы связано с направлениями векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ правилом правого винта. Приложен момент силы к точке *O* (изображено на рисунке 7.2).

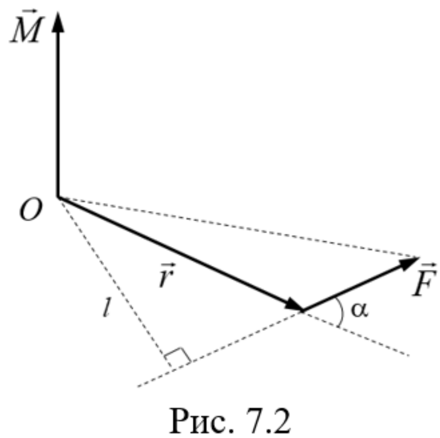

Рис. 7.2

2. Момент импульса.

По тем же правилам можно ввести и другую физическую величину, которую называют *моментом импульса*. Момент импульса обозначается буквой $\vec{L}$ и равен

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]. \quad (7.3)$$

Его модуль

$$L = m\upsilon r \sin\alpha, \quad (7.4)$$

а направление определяется так же, как и момента силы. Приложен момент импульса так же к точке O (рис.7.3).

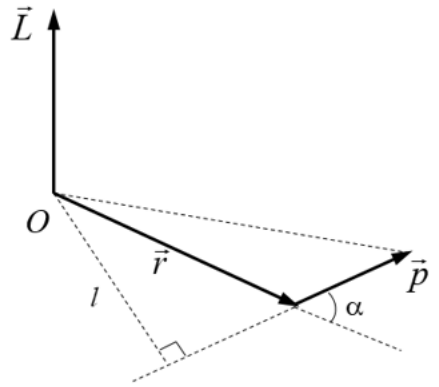

Рис. 7.3

Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется. Рассмотрим в качестве примера расчета момента импульса два частных случая:

1) Частица движется равномерно по прямолинейной траектории (рис. 7.4). Независимо от того, где находится частица, модуль и направление момента импульса $\vec{L}$ останется неизменным. Модуль момента импульса в этом случае равен

$$L = m\upsilon r \sin\alpha = m\upsilon l.$$

Величина l называется плечом импульса.

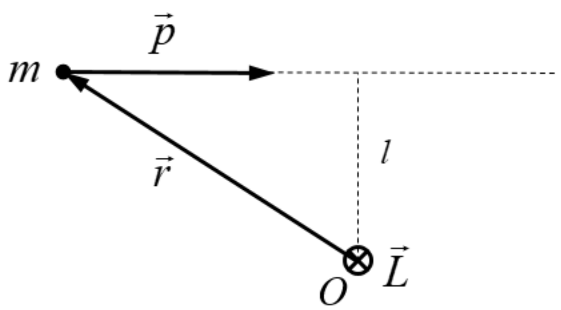

Рис. 7.4

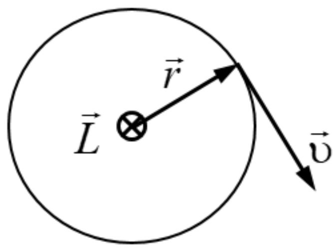

Рис. 7.5

2) Частица движется по окружности радиуса r (рис.7.5). Модуль момента импульса относительно центра окружности

$$L = m\upsilon r .$$

Направление вектора $\vec{L}$ при движении частицы остается неизменным − перпендикулярно плоскости рисунка «от нас».

3. Закон изменения момента импульса частицы.

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение вектора $\vec{L}$ в данной системе отсчета. Для этого продифференцируем выражение для момента импульса (7.3) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \qquad (7.5)$$

Так как точка O неподвижна (материальная точка движется так, как изображено на рисунке 7.3), то вектор $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ равен скорости $\vec{\upsilon}$ частицы, то есть совпадает по направлению с вектором импульса, поэтому первая скобка в (7.5) равна нулю. Далее, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{F}$ − равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке. Следовательно, уравнение приобретает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \qquad (7.6)$$

Величина, стоящая в правой части уравнения (7.6), − это момент сил, определенный относительно точки O.

Итак, производная по времени от момента импульса $\vec{L}$ частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту $\vec{M}$ равнодействующей силы $\vec{F}$ относительно той же точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (7.7)$$

Это закон изменения момента импульса одной частицы. Этот закон представляет собой три независимых уравнения для каждой из проекций момента импульса. Если какая-нибудь из проекций момента силы равна нулю, то говорят, что соответствующая проекция момента импульса сохраняется.

4. Закон сохранения момента импульса.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из N частиц, которые взаимодействуют между собой и с окружающей средой. Назовем моментом импульса системы частиц сумму моментов импульса отдельных частиц. Вычислим производную по времени от момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\vec{M}_{ij}^{\,внутр} + \vec{M}_i^{\,внешн}\right) \qquad (7.8)$$

Так как все взаимодействия внутри системы подчиняются III закону Ньютона, то $\vec{F}_{\boldsymbol{ij}} = -\vec{F}_{ji}$ и

$$\vec{M}_{ij}^{*} = \vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}\right] + \left[\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}\right] = \left[\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}\right] = -\left[\vec{r}_{ij}, \vec{F}_{ij}\right] = 0,$$

так как эти вектора направлены по одной прямой. Тогда уравнение для изменения момента импульса приобретает вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i^{\,внешн} = \vec{M}^{\,внешн} \qquad (7.9)$$

Таким образом, момент импульса системы взаимодействующих частиц может изменяться только под действием моментов внешних сил – это утверждение составляет закон изменения момента импульса системы. Если же на систему моменты внешних сил не действуют (система замкнута с точки зрения момента импульса), то момент импульса такой системы сохраняется с течением времени. Это утверждение составляет *закон сохранения момента импульса системы частиц.*

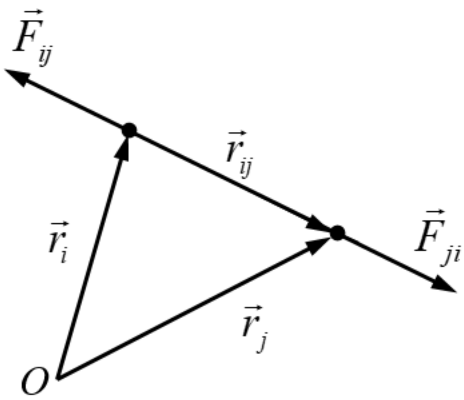

Рис. 7.6

Демонстрации закона сохранения момента импульса можно посмотреть здесь: https://youtu.be/zjY9PqvuluM и веселая https://youtu.be/ywFcukXHjPE. Наряду с законами сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом природы и играет определяющую роль при рассмотрении любых природных явлений.

5. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Переходим к изучению движения абсолютно твердого тела (АТТ). В отличие от материальной точки, АТТ имеет размеры и может двигаться не только поступательно, но и вращаться относительно некоторой оси. Определим понятия поступательного и вращательного движения.

Поступательное движение − это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. При этом все точки тела движутся с одинаковыми линейными скоростями и ускорениями, а их траектории имеют одинаковый вид. Для поступательного движения справедлив II закон Ньютона для материальной точки, в качестве которой удобно выбрать центр масс. Таким образом, теорема о движении центра масс полностью описывает поступательное движение абсолютно твердого тела.

Вращательное движение − это движение, при котором хотя бы одна точка тела остается неподвижной. Если АТТ вращается вокруг неподвижной оси, то все точки тела имеют одинаковые угловые скорости и угловые ускорения, а их траекториями являются различные окружности. В этом смысле вращательное движение удобно описывать угловыми переменными: φ, ω, β.

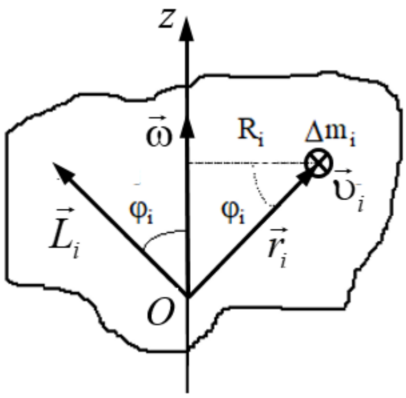

Рис. 7.7

Таким образом, движение АТТ всегда можно разделить на поступательное движение центра масс и вращение относительно него и изучать их отдельно. Поэтому нашей задачей теперь является получение уравнения для вращательного движения АТТ вокруг неподвижной оси.

Мысленно разобьем тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, на элементарные массы Δm_i. На рисунке 7.7

изображено положение тела относительно оси вращения. Ось вращения и элементарная масса лежат в плоскости чертежа. Скорость $\vec{\upsilon}_i$ направлена за чертеж. Момент импульса $\vec{L}_i$ массы Δm_i перпендикулярен к векторам $\vec{\upsilon}_i$ и $\vec{r}_i$. Расстояние массы Δm_i от оси вращения равно

$$R_i = r_i\cos\varphi_i.$$

По определению момента импульса материальной точки

$$\vec{L}_i = \Delta m_i \; [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i].$$

Здесь $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, определяющий положение массы Δm_i относительно точки O, $\vec{\upsilon}_i$ − скорость i - той элементарной массы.

Момент импульса тела $\vec{L}$ равен сумме моментов импульса элементарных масс:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i]. \qquad (7.10)$$

Из рисунка 7.7 следует, что в случае несимметричного тела векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ неколлинеарные. Поэтому при равномерном вращении момент импульса описывает конус вокруг оси вращения.

Для твердого тела, как и для системы материальных точек, справедлив закон изменения момента импульса. Запишем его в проекции на ось вращения, которую обозначим за ось z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \qquad (7.11)$$

Найдем момент импульса АТТ относительно оси вращения z, то есть проекцию вектора $\vec{L}$ на ось z. Из рисунка 7.7 можно сделать вывод, что

$$L_{zi} = L_i\cos\varphi_i.$$

Поскольку угол между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{\upsilon}_i$ прямой,

$$L_i = \Delta m_i r_i \upsilon_i.$$

Следовательно,

$$L_{zi} = \Delta m_i r_i \upsilon_i \cos\varphi_i = \Delta m_i R_i \; \upsilon_i, \qquad (7.12)$$

где R_i − расстояние массы Δm_i от оси вращения.

Зная, что $\upsilon_i = \omega R_i$, получим

$$L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i.$$

Проекция момента импульса тела L_z равна сумме проекций L_{zi}:

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i. \qquad (7.13)$$

Полученное выражение не зависит от положения на оси вращения точки О, относительно которой определяется момент импульса $\vec{L}$.

Величина же

$$I_z = \sum R_i^2 \Delta m_i, \qquad (7.14)$$

равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от некоторой оси, называется *моментом инерции тела* относительно этой оси. Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или покоится.

Теперь проекцию на ось z момента импульса АТТ (7.14) можно представить в виде

$$L_z = I_z \omega. \qquad (7.15)$$

Принимая во внимание то, что для АТТ момент инерции относительно оси есть величина неизменная, получаем основное уравнение вращательного движения АТТ:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \qquad (7.16)$$

или

$$I_z \beta_z = M_z. \qquad (7.17)$$

Это уравнение заменяет второй закон Ньютона в случае вращательного движения. Роль массы в нем играет момент инерции, а роль силы − момент силы.

Литература

1. Иванов, В. К. Физика. Механика, молекулярная физика и термодинамика : учебное пособие для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 16.03.01 "Техническая физика" / В. К. Иванов, А. Н. Ипатов ; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, [Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций]Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. 162 с.
2. Иродов И. Е. Физика макросистем : основные законы : учебное пособие / И. Е. Иродов. 8-е изд. Москва : Лаборатория знаний, 2020. 210 с.
3. Савельев И.В. Курс физики : учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям : [в 3 т.]. Т. 1: Механика; Молекулярная физика Изд. 5-е, стер. 2016. 350 с.

Разработал доцент кафедры физики
Васильев А.Э.