

## **Физико-математическая модель решетчатых и шаровых упаковок пространства.**

Г.С. Мельников.

МГУП «ТКС-оптика ГОИ»

Многообещающие успехи наноструктурных технологий, возможности управления свойствами световых потоков с помощью фотонных кристаллов, необходимость объяснения дифракционных явлений и эффектов полостных структур требуют новых физико-математических моделей пространственного и числового континуумов.

В силу ограниченности объема одной журнальной публикации, физико-математическая модель пространственного и числового континуумов представлена в виде связанной серии статей. Настоящая статья является продолжением статей [1,2,3,4.]. В настоящей статье излагается математическое описание регулярных различных решеточных и полостных структур в гиперкомплексном параметрическом виде. Экспериментальное подтверждение результатов построения модели и технологической обработки дифракционных элементов с заданными структурами графических топологий и их Фурье образов излагается в заключительной статье [5].

### **Введение**

Как показано Н.А. Стрелковым [6...8], универсальность оптимальных решеток наблюдается при аппроксимации в пространствах Соболева, когда одна и та же решетка, сопряженная к которой порождает плотнейшую  $N$  – кратную укладку одинаковых шаров при выполнении пространства в Евклидовом пространстве  $E_n$  [9], является оптимальной одновременно для всей совокупности пар  $(W_2^s, W_2^m)$  при любых  $s < m$ .

**Примечание:** Пространство Соболева  $W_p^R(\Omega)$  определено и впервые применено в теории краевых задач математической физики [10,11]. Благодаря тому, что в определении пространств Соболева С.Л. участвуют не обычные, а обобщенные функции, классы  $W_p$  получили обобщение на случай дробных чисел или векторов, т.е. рассматриваются как Банаховы пространства вложений [12].

В результате в работах [6,7] сделан вывод, что свойство решеток быть оптимальными универсально, и не зависит от  $s$  и  $m$ .

По результатам этого исследования Н.А. Стрелковым построены решетки, порождающие сверхплотные укладки, в частности

– решетка с базисом  $(1,1,-1)$ ,  $(1,-1,1)$   $(-1,1,1)$  так называемая *бсс* – решетка, получаемая из кубической решетки добавлением центров фундаментальных кубов, или что то же самое, объединение двух кубических решеток, сдвинутых одна относительно другой на полшага в каждом из трех направлений ребер.

А эта структура, как было доказано в [3], является структурой вложений простых кубических решеток и порождающих сверхплотные упаковки полностью соответствует концепции ВР «Айрэс» построения “абсолютного куба” [13]. Автором настоящей статьи с 1999 года в интересах фонда «Айрэс» выполнен цикл теоретических и экспериментальных исследований по физическому и

математическому описанию графических топологий двумерных дифракционных элементов [14]. Разработаны и обоснованы новые топологии двумерных дифракционных элементов. Выполнены экспериментальные исследования в ближней (Френелевской) и дальней (Фраунгоффера) зонах образования Фурье структуризации этими элементами коллимированных когерентных потоков излучения ЭМК [5]. Результатом всех названных исследований явилось построение общей физико-математической модели классификации многогранников и оптимальных решеточных и полостных структур плотного и сверхплотного выполнения пространства с использованием обобщенной Эйлеровой характеристики в трактовке автора связанной серии статей – число информационных осей симметрии [1...3]

$$N^d = \frac{T + F + R}{2} - \text{число информационных осей симметрии} \quad (1)$$

где,

$d$ - топологическая размерность характеристики;

$T$  – число вершин;

$F$  – число граней;

$R$  – число ребер многогранников.

Задачи, поставленные в настоящей статье:

- показать этапы вывода аппарата гиперкомплексных параметрических уравнений, записываемых в символьном виде для полного описание рассмотренных ранее пространственных структур,
- привести результаты математического моделирования параметрических уравнений в программе MathCAD 2000 Professional,
- показать связь регулярных решеточных и полостных структур с дифракционной Фурье структуризацией коллимированных когерентных потоков, пропускаемых (отражаемых) графически синтезированными голограммами с топологиями названных структур. Сами результаты исследования Фурье образов, создаваемых оптическими транспарантами с названными топологиями будут излагаться в статье [5].

Следует отметить, что полученные результаты не были бы достигнуты без постоянной помощи и поддержки со стороны многих коллег и единомышленников.

Пользуясь случаем, хочу выразить свою признательность президенту Фонда «Айрес» И.Н. Серову за финансовую поддержку и проявленный интерес к выполненному исследованию, Н.Б. Егоровой, А.В. Алексеичеву и Э.В. Бычкову за плодотворные обсуждения промежуточных результатов и согласование задач исследований.

Особо выражаю свою признательность моим коллегам:

- А.А. Ошарину за создание иллюстративного материала, помощь в разработке таблиц, а также, оформление и техническую редакцию статьи.
- Н.Б. Степановой за помощь в библиографическом поиске.

## **1. Вывод аппарата гиперкомплексных параметрических уравнений, описывающих пространственные топологии полостных и решеточных 3D-структур.**

### **1.1. Типы полостных и решеточных 3D-структур.**

Все полостные, шаровые и регулярные решеточные структуры часто называются, разбиением (выполнением) пространства или покрытиями.

Покрывание имеет свойство называемое функцией покрывания, характеризующей некоторую пространственную область в качестве области определения, а множество значений элементов покрывания может быть любым множеством.

Покрывания имеют множество важных подтипов. Например:

- Сетка
- Покрывание дискретными точками
- Покрывание линейными цепочками
- Решетка
- Покрывание многогранниками
- Покрывание плотной укладкой шаров
- Покрывание фрактальной сверхплотной и плотнейшей укладки сферических и многогранных симплексов и т.д.

Функцией покрывания может быть конечный набор точек или множество всех точек принадлежащей некоторой определенной геометрии. Покрывания, с такой областью определения, точкам ставят в соответствие некоторые значения (векторы). Так же допускается, что область определения состоит из множества геометрий. Покрывания этого вида геометриям также ставят в соответствие величины (векторы).

По описанию первых трех типов покрываний автором успешно использовались векторные представления, разработанные в [4,16,17,19]. Цель настоящего исследования перенести символичный аппарат комплекснозначных функций комплексных переменных на разбиение (выполнение) 3D-пространств.

Все вышеперечисленные покрывания, рассматриваемые в математике, не учитывают самого основного принципа выполнения пространства. Это принцип концентрического само подобного повторения (заполнения) элементарной поверхностной формы. По этому принципу в природе осуществляется рост всех динамических систем:

- само подобный рост плода,
- рост элементов фауны и флоры,
- рост живых клеточных структур,
- рост кристаллов и т. д.

Как уже отмечалось в [1...3] выполнение (разбиение) пространства может быть плотным, сверхплотным и плотнейшим. Плотные и сверхплотные покрывания (упаковки пространства) обоснованы и рассмотрены в [2,3] о плотнейших конфигурациях пространства речь пойдет ниже.

При изучении структуры надо иметь ввиду, что взаимное расположение атомов и молекул в веществе, обусловлено не только химическими взаимодействиями. Это только структура отдельной, изолированной молекулы полностью определяется направленными химическими связями между взаимодействующими атомами, однако при заполнении пространства множеством молекул, строение системы дополнительно регулируется общими геометрическими принципами заполнения пространства [27].

Плотным пространство может быть выполнено в соответствии с геометрическими представлениями Е.С. Федорова [22]. Более подробно о взглядах Е.С. Федорова на принципы выполнения пространства было изложено ранее в [2].

О принципах плотной упаковки пространства шарами и сферами наиболее полно изложено в синергетике Фуллера Р. Синергетика (Synergetics) была разработана на экспериментальных наблюдениях поведения сфер равного диаметра, упаковка которых была плотной настолько насколько возможно, чтобы формировать регулярные геометрические фигуры. Основная и наиболее простая устойчивая геометрическая конфигурация синергетической геометрии – тетраэдр

(tetrahedron), сформированный из четырех сфер прижатых друг к другу, в совершенной конфигурации треугольников, формирующих четыре угла в 60 градусов. Другие важные элементы – октаэдр (octahedron) (сформированный шестью плотноупакованными сферами) и эквilibrium)- векторное равновесие, которое является результатом соединения двенадцати сфер, выложенных вокруг тринадцатой центральной сферы, с всенаправленной максимально плотной упаковкой, под 60 градусов скоординированная конфигурация. Куб, который является базой для наших современных методов строительства и  $x$ - $y$ - $z$  декартова система координат, не является само устойчивой конфигурацией. Восьми сферам, формирующим куб (по Фуллеру) присуща неустойчивость. Чтобы получать устойчивость, им нужно искусственно придать устойчивость, связывая между собой подобно тому, как связан тетраэдр. О геометрических конструкциях из связанных сфер простой кубической укладки, обусловленной законами комплексных отображений многоугольных траекторий в круглом бильярде и законами построения числового континуума тела арифметических прогрессий, было ранее изложено в предыдущих статьях цикла [2,4].

По покрытию (выполнению) пространства многогранниками наиболее плодотворен метод Вороного-Делоне. Исходным геометрическим построением, на котором базируется метод, является так называемый многогранник Вороного - область пространства, ближайшая к данному атому. В методе соединяется выбранный атом с соседним атомом отрезком прямой и через середину этого отрезка проводится перпендикулярная к нему плоскость. Эта плоскость называется плоскостью Вороного и, очевидно, является геометрическим местом точек равноудаленных от атомов. Она делит все пространство на два полупространства, которые обладают тем свойством, что все точки одного полупространства ближе к своему атому, чем к атому в другом полупространстве. Если же осуществить такую процедуру со всеми соседями атома, то плоскости Вороного ограничат вокруг атома искомую область пространства. То, что ограниченная область является многогранником, следует из того, что она ограничена плоскостями. Построив многогранник Вороного, мы получаем тело, метрика и топология которого позволяют характеризовать это расположение. Метод применим как к регулярным, так и к нерегулярным 3D- структурам.

Современные исследования регулярных и нерегулярных структур требует математического описания, с помощью которого можно было бы приступить к изучению взаимного расположения молекул в пространстве, зная только принципы формирования исходных симплексов в пространстве либо поверхностную форму исходного элемента регулярной 3D-структуры. Упомянутый принцип само подобия является одним из основных принципов фракталов - новой и по-настоящему плодотворной научной идеологии.

Особо остро выступает требование необходимости строгого математического описания сверхплотных и плотнейших упаковок пространства, основанных на фрактальных свойствах, как структур пространства, так и структур числового континуума с точки зрения создания новых композитных материалов и конструкций. Законы, связанные с симметрией - это одни из самых универсальных и основополагающих законов мироздания. Симметрия - это одно из самых глубоких, самых базисных характеристик бытия, которая отмечается на ее самых разных уровнях. Симметрию (как и ее спутницу, асимметрию) можно наблюдать в мире физическом, органическом, социальном и духовном. Симметрия фигурирует в квантовой физике (левый и правый спин электрона), в химии (левовращающие и правовращающие кристаллические структуры) и,

естественно, в биологии, которая имеет дело с объектами, практически всегда подчиненными законам симметрии. [27...32]. Соответственно и введенное понятие информационных осей симметрии требует своего наглядного и последовательного объяснения. По этой причине построение математической модели принципов описания регулярных 3D-пространственных форм мы начнем, непосредственно, с наиболее сложной задачи – задачи описания фрактальных структур.

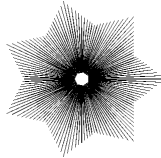
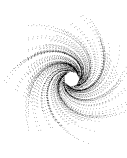
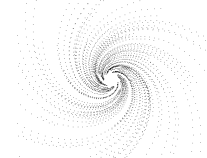
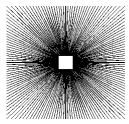
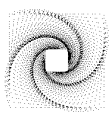
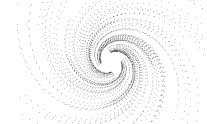
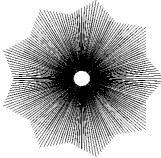
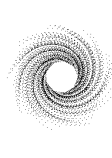
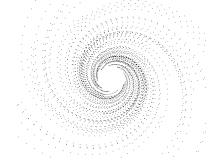
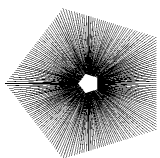

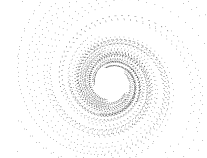
## 2. Математическое описание фрактальных 3D-структур.

В таблице 3 и Рис.3. [1] мы разместили в строках  $\{U_{1,1,k}\}$  и столбцах  $\{U_{1,n,1}\}$  последовательности преобразований плоских многогранников – многоугольников. Действительно, в 3D- пространстве, многоугольник это многогранник, лежащий в не двумерной плоскости, имеющий  $n$  или  $k$  вершин,  $n$  или  $k$  ребер и по две грани. Это очевидно, и соответствует Эйлеровой характеристике (1).

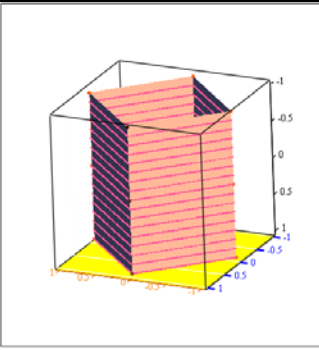
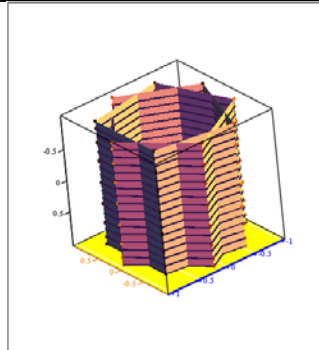
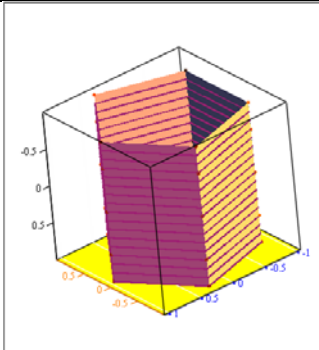
Для концентрического заполнения такой плоскости многоугольниками мы вывели в [4] уравнения гиперкомплексного параметрического описания в символьном виде

$$\dot{Z}_i(D, p, k_r) = Z_r \cdot Z_\varphi + i \cdot Z_r \cdot Z_{\varphi_i} \quad (D, p, k_r) = \frac{2^p}{\sqrt{2}} R \cdot m(p) \cdot \sqrt{\left[ \sin^{2 \cdot D} \left( \frac{\pi}{k_r} \right) + \cos^{2 \cdot D} \left( \frac{\pi}{k_r} \right) \right]} \cdot e^{i \cdot \left[ \frac{2 \cdot \pi}{k_r} (p-1) + \frac{\pi}{k_r} \right]} \quad (2)$$

В Табл. 1 для наглядности мы приводим несколько отображений многоугольников (плоских многогранников с коэффициентами фрактальности  $k \Rightarrow 3,5; 4; 4,5; 4$ ) и их левосторонние и правосторонние спиральные составляющие комплексных отображений. Табл. 1.

$k_r = n/m$	$\dot{Z}_i(D, p, k_r)$	$Z(D, p, k_r)$	$Z(D, p, -k_r)$
7/2			
4/1			
9/2			
5/1			

В Табл. 2 для наглядности мы приводим несколько отображений многогранников (призм с коэффициентами фрактальности  $k \Rightarrow 4; 4,5; 4$ ) построенных по уравнениям конструирования торов (при частных условиях  $k=1$ ) с использованием матричной 3D-формы параметрических уравнений геометрического поля пространственных частот.

Программа и результаты моделирования		
$N := 50$ $i := 0..N \quad j := 0, 1..N \quad R := 1 \quad k := 1 \quad q := \frac{9}{2}$ $d := 1$		
$X_{i,j} := R \cdot \left[ \cos \left[ \frac{2 \cdot \pi}{q} \cdot (i) \right] + \left[ R \cdot \left( 2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{k} \right) \right)^d \right] \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi}{k} \right)}{\cos \left[ \frac{\pi}{k} \cdot [1 + 2 \cdot j - (2 \cdot \text{ceil}(j))] \right]} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{k} \cdot j \right) \right]$		
$Y_{i,j} := R \cdot \left[ \sin \left[ \frac{2 \cdot \pi}{q} \cdot (i) \right] + \left[ R \cdot \left( 2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{k} \right) \right)^d \right] \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi}{k} \right)}{\cos \left[ \frac{\pi}{k} \cdot [1 + 2 \cdot j - (2 \cdot \text{ceil}(j))] \right]} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{k} \cdot j \right) \right]$		
$Z_{i,j} := R \cdot \left[ \sin \left( \frac{2 \cdot \pi}{q} \cdot j \right) + \left[ R \cdot \left( 2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{k} \right) \right)^d \right] \cdot \frac{\cos \left( \frac{\pi}{k} \right)}{\cos \left[ \frac{\pi}{k} \cdot [1 + 2 \cdot j - (2 \cdot \text{ceil}(j))] \right]} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{k} \cdot i \right) \right]$		
$q = 4$	$q = 9/2$	$q = 5$
		

Символьное описание пространственных структур имеет очень много общего с символьным описанием уравнений электромагнитного поля. Однако, не смотря на очень большое сходство этих аппаратов описания волновых процессов, в них имеются следующие существенные различия:

- Символический метод известной теории поля оперирует с круговыми тригонометрическими функциями.
- Метод описания геометрического поля пространственных частот использует триаду комплексных тригонометрических функций:
  - круговые тригонометрические функции это функции для которых конец радиус-вектора, так как и в теории электромагнитного поля, обходит из центра координат окружность

- некруговые тригонометрические функции, для которых конец радиус-вектора обходит правильные замкнутые или разомкнутые вписанные (или описанные) многоугольники, суть - модовые и субмодовые бильярдные траектории,

- инверсные круговые – дискретные тригонометрические функции, для которых конец радиус-вектора обходит астроидо подобные инверсные дискретные отображения окружности внутри круга. Дуги астроидо подобной инверсной окружности образуются векторами, начало которых располагаются в вершинах описанных правильных многоугольников.

- В известной теории электромагнитного поля фазовая плоскость и частотная плоскость, сугубо различные плоскости.
- В теории Геометрического Поля Пространственных Частот фазовая и частотные плоскости суть одна и та же плоскость, только при описании процессов в частотной плоскости гармонические процессы характеризуются через различные скорости распространения векторной величины по математическим бильярдным траекториям в инверсном пространстве круга.
- Гармонический анализ известной теории электромагнитного поля представляет разложение периодической функции в виде частотного спектра Фурье.
- В отличие от этого, гармонический анализ в теории Геометрического Поля Пространственных Частот представляет периодическую функцию как сумму комплексных гармонических составляющих (модовых, субмодовых и стохастических) фазового разложения этих функций.

Сам принцип фрактального замощения плоскости можно проследить на примере новой трактовки топологической размерности классического фрактала – снежинки Коха.

**Снежинка Коха.** Граница *снежинки*, придуманной Гельгом фон Кохом в 1904 году (рис.1.), описывается кривой, составленной из трех одинаковых фракталов размерности  $d \approx 1,2618$ . Каждая треть снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника.

Интуитивно ясно, что при такой трактовке, последовательность кривых  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  стремится к некоторой предельной кривой  $K$ . В теории Б. Мандельброта предполагается, что кривая  $K$  существует, и рассматриваются некоторые ее свойства.



(a)

(б)



(в)

(г)

Рис. 1. а)  $K_0$ , б)  $K_1$ , в)  $K_2$ , г)  $K_3$ 

Если взять копию  $K$ , уменьшенную в три раза ( $r = 1/3$ ), то все множество  $K$  можно составить из  $N = 4$  таких копий. Следовательно, отношение самоподобия выполняется при указанных  $N$  и  $r$ , а размерность фрактала будет:

$$d = \log(4)/\log(3) \approx 1,2618. \quad (3)$$

Наш подход к интерпретации *снежинки* существенно отличается от подхода Б. Мандельброта и основан на трактовке пространственных форм с недвумерными плоскостями.

С точки зрения фрактальной геометрии, фрактал – аттрактор системы итерированных функций и представляет собой либо фрактальную пыль, либо проекцию на пространство с более низкой размерностью.

В нашем понимании «Снежинка Коха» – фрактал, и к тому же, фрактал дробной размерности, но его надо рассматривать не с точки зрения итерирования первоначально одномерной линии, а с точки зрения итеративных поворотов со сжатием и разнесением на периферию исходной двумерной фигуры – равнобедренного треугольника.

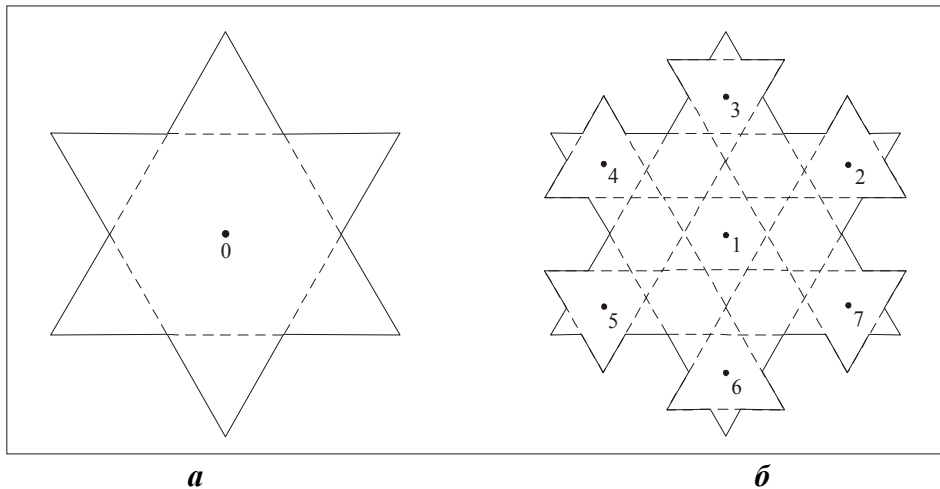


Рис 2. Авторская трактовка алгоритма формирования снежинки Коха

Как видно из рис.2. на нулевом уровне итеративных операций мы имеем один центр фрактального разворота, на пересечении биссектрис равнобедренного треугольника и осуществляем поворот исходного треугольника на угол, равный  $\pi/3$ .

Уровни фрактализации	3D аналог
0-й уровень	

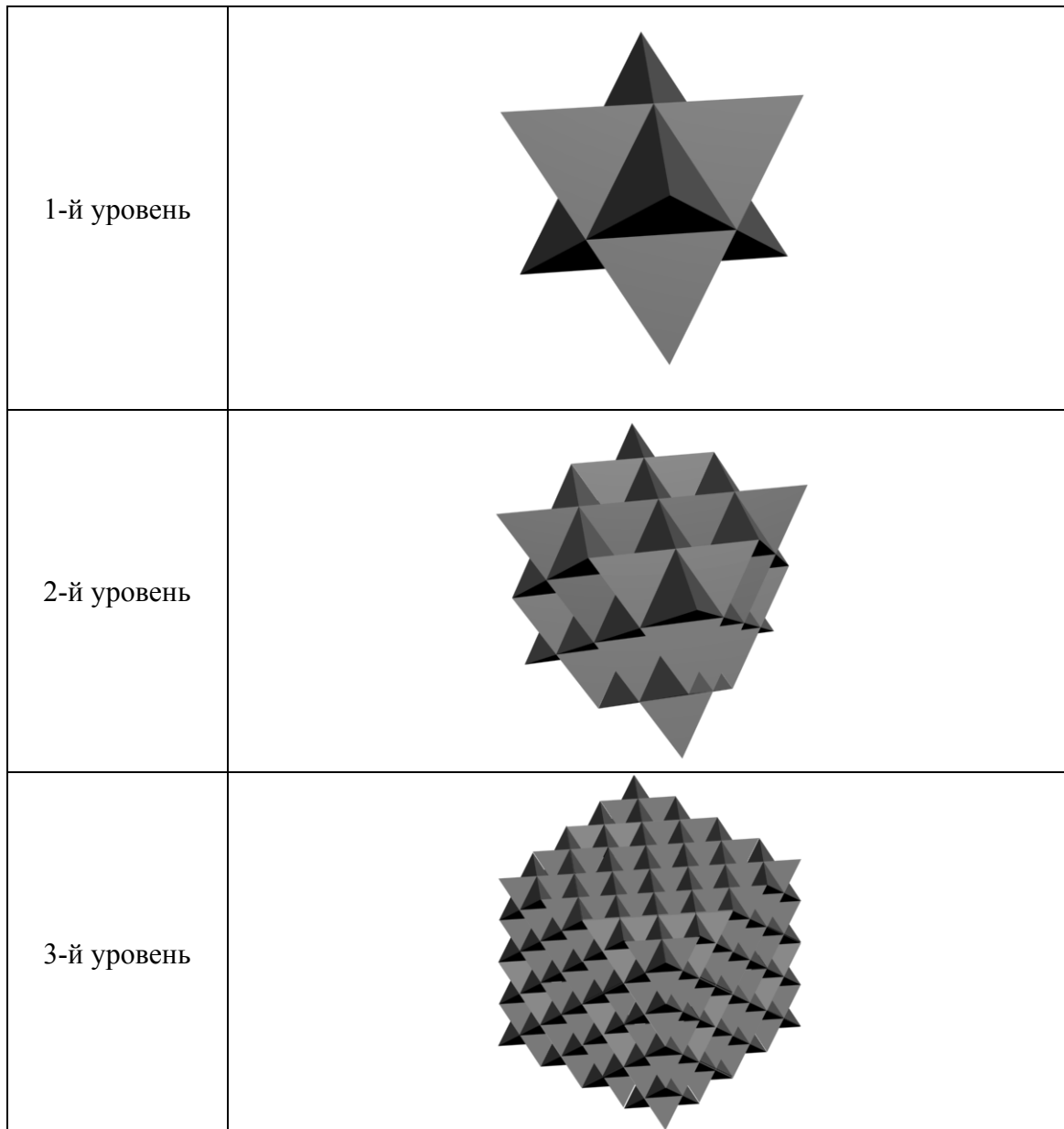


Рис 3. Авторская трактовка алгоритма формирования 3D – снежинки Коха

На первом уровне получаем 7 центров фрактального разворота и семь синхронных операций поворота треугольников со сторонами  $1/3 L$  исходного треугольника. На втором уровне фрактализации имеем 49 центров фрактального разворота (21 из которых не влияют на изменение границы «Снежинки Коха», а добавляют наслаиваемые участки площади итерируемой фигуры). В результате такого подхода мы уходим от математического парадокса и приходим к абсолютно реальному пониманию, что фигура «Снежинки Коха» не является плоской кривой двумерной плоскости, а является плоским звездчатым многогранником и ее топологическая размерность определяется из выражения  $D = \ln 7 / \ln 2 = 2,81\dots$

По аналогии с трактовкой принципов структурного образования снежинки Коха в плоскости можно рассмотреть ее 3D аналог, принцип фрактальной структуризации которого ясен из рис. 3

Как видно из рис. 3., 3D – снежинка Коха представляет собой объемный фрактальный многогранник, образовываемый методом повторения фрактального разворота в пространстве само подобных тетраэдров с уменьшением масштаба  $R$  в два раза на каждом уровне фрактализации, как относительно общего центра, так и

относительно периферийных центров фрактализации. В итоге, фрактальная 3D – фигура Коха будет стремиться, плотнейшим образом, заполнить кубическую решетку пространства само подобными конфигурациями при стремлении числа уровней фрактализации к бесконечности. В этой упаковке пространства в качестве исходного многогранника используется тетраэдр и двойственный ему второй тетраэдр, так называемые тетраэдры близнецы, а на первом уровне фрактального разворота, кроме нулевого центра фрактализации добавляется еще восемь; на втором семьдесят два и т. д .

Таким образом, 3D – снежинка Коха не является простой трехмерной фигурой, а является объемным звездчатым многогранником, а его топологическая размерность определяется из выражения  $D = \ln 9 / \ln 2 = 3,1699\dots$

Для перехода к кватернионному 3D описанию математического бильярда в шаре и последующему распространению полученной модели на математическую модель построения различных трехмерных фрактальных конфигураций, обратимся к рассмотрению геометрических представлений способов комплексных отображений само подобных фрактоний<sup>1</sup> (рис. 3). Для чего поясним способ векторного представления их комплексных отображений в пространстве на примере фрактоний – куб – октаэдр.

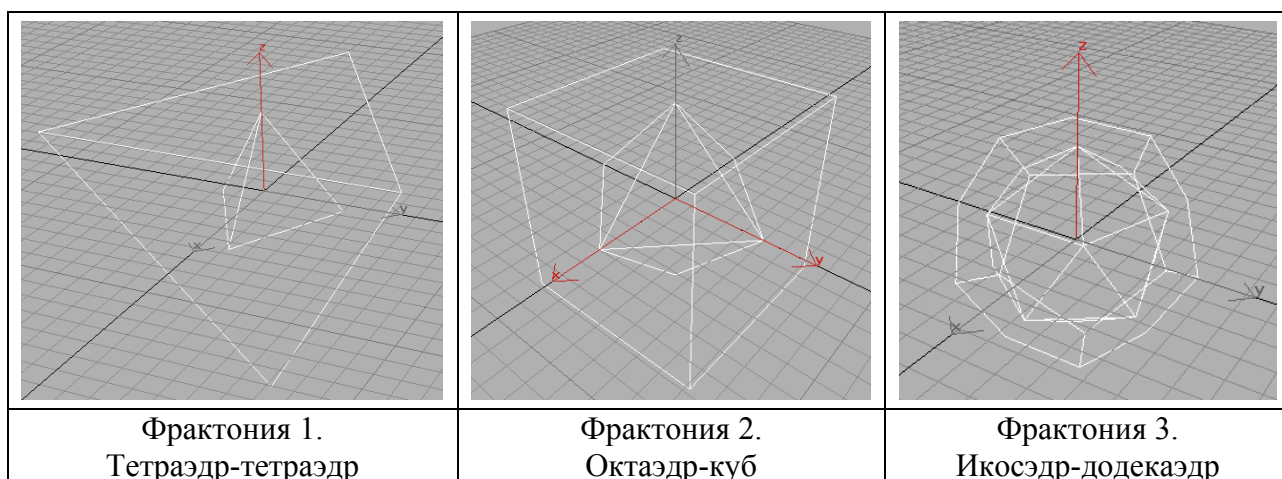


Рис. 3. Три базовые основы возможных фрактальных топологий.

Как видно из рис. 3, для 3D - представления в рациональные сферы вписываются пространственные фигуры с иррациональными длинами ребер.

Их вершины, характеризуемые рациональными числами, определяют радиусы рациональных сфер

$$R_0(D) = R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^{2D} \quad (3)$$

В сферы рациональных радиусов вписываются пространственные правильные фигуры с иррациональной длиной ребер.

Эти объемные рациональные конфигурации вписываются своими вершинами в середины граней иррациональных пространственных конфигураций, у которых половины отрезков осей, соединяющих диаметрально противоположные вершины, определяют их радиусы  $R_{ir}(D)$

<sup>1</sup> Вводим предположение, что все объемные конфигурации формируются триадой сопрягаемых друг с другом пар правильных Платоновых тел. По аналогии с кристаллографическим определением – «сингонии», будем называть такие пары Платоновых тел – фрактониями. Это определение построено по принципу соединения: fractional (англ.) – дробный и onia – суффикс, характеризующий объемные фундаментальные конструкции.

$$R_{ir}(D) = R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^{(2D-1)} \quad (4)$$

При таких представлениях мы легко можем перейти к построению математической модели отображения  $3D$  - фрактальных конфигураций в пространстве.

Базовые фрактоны (см. рис. 3) являются основами построения вложенных сеточных структур с ортогональным дополнением друг друга, т.е. это те конструкции, на основе которых можно создать плотнейшие, оптимальные упаковки. Эти упаковки, на наш взгляд, должны обеспечить оптимальные резонансные свойства полостных структур, более эффективные, чем структуры, построенные на базе топологии абсолютного куба, т.е. сверхплотные упаковки. На наш взгляд, системная проработка конструкций, приведенных в табл. 8, позволит выйти на создание объемных полостных структур с более высокими резонансными свойствами чем структуры - графически синтезированные голограммы на основе сечения шаровых конструкций, построенных по принципам заполнения пространства, условно названных “абсолютный куб” [13].

### 3. Вывод уравнений математического описания фрактальных пространственных конфигураций

Если рассматривать принципы объемной фрактализации исходя из введенной в [1,2,3] модели конфигурации пространства как фрактальной структуры последовательно вложенных друг в друга (по принципу «матрешки») сферических пространственно-временных оболочек, можно констатировать следующие утверждения:

- Четырехмерное «пространство-время» хорошо описывается комплекснозначными функциями комплексных аргументов, математический аппарат которых назван геометрическим полем пространственных частот (ГППЧ) [4].
- Уравнения геометрического поля пространственных частот [4] выведены на основе объемных кватернионных представлений и согласуются со строгим решением плоскостной задачи математических бильярдов в круге.
- При решении плоскостной задачи математического бильярда в круге реальные траектории движения бильярдного шара рассматриваются как система связанных векторов, распространяющихся в круге либо по замкнутым (модовым и субмодовым) траекториям, характеризуемым коэффициентами фрактальности « $k$ » в виде целых и рациональных чисел, либо по разомкнутым, характеризуемым трансцендентными числами « $k$ ». Для всех траекторий хордовое и фазовые определения сводятся к простым выражениям:

$$- L_0 = 2 \cdot R_0 \cdot \sin \frac{\pi}{k} - \text{хордовое определение звена траектории, т.е. длины вектора} \quad (5)$$

$$- \Omega = \frac{2\pi}{k} - \text{фазовое определение звена траектории,} \quad (6)$$

где  $R_0$  – радиус описанной окружности рациональной исходной траектории,  
 $k$  – коэффициент фрактальности, характеризующий способ разбиения бильярдного круга названной системы связанных векторов.

- Отображение системы связанных векторов во внешнее и внутреннее пространство базируется на фундаментальной триаде определения комплексных величин, а именно:

- Комплексное число это вектор,

- Комплексное число – это координатная точка на комплексной плоскости, геометрическое построение которой осуществляется параллельным переносом произвольного вектора в центр координат комплексной плоскости с отметкой координатной точки как вершины перенесенного вектора;
- Комплексное число – это оператор поворота.

• В результате, отображение каждого звена многоугольных траекторий векторов, вписанных в круги, образующиеся в каждом сечении рациональной нулевой сферы, представляется в виде системы из ломаных (дискретных) спиралей, каждая из которых может быть представлена параметрическим выражением вида

$$Z_j(k, p, D) = R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^D \cdot m(p, k) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{k} \cdot p + D \left( \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{k} \right) \right)} - \text{фазовое представление} \quad (7)$$

$$Z_j(k, t, D) = R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^D \cdot m(p, k) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi \cdot V_\phi}{k \cdot R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^{D+1}} t + D \left( \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{k} \right) \right)} - \text{частотное представление} \quad (8)$$

• Переход от фазового представления к частотному осуществляется посредством замены синфазного параметра  $p$  функцией времени  $t$ , связанной с фазовой скоростью процесса распространения  $V_\phi$  (опроса) в круге – 2D- аналоге бильярдного шара по ломаным траекториям, т.е. в сечениях рационального шара.

При этом длина звена  $L_0 = 2R_0 \cdot \sin \frac{\pi}{k}$ , а параметр  $p$

$$p = \frac{V_\phi}{R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^{D+1}} \cdot t \quad (9)$$

В случае описания распространения электромагнитных аналогов бильярдных шаров – фотонов, принимается

$$V_\phi = c \quad (10)$$

остальные параметры и индексы ранее определены.

Для перехода к кватернионному 3D описанию математического бильярда в шаре и последующему распространению полученной модели на математическую модель построения любых трехмерных фрактальных конфигураций необходимо проведение дополнительных теоретических и экспериментальных исследований.

Однако уже по полученным результатам математического моделирования [4,5] можно обозначить вид общих выражений. Так например, кватернионное описание сверхплотной (построенной по алгоритму «абсолютного куба») и, соответственно, сферических сверхплотных упаковок в кватернионной форме будут описываться символьными выражениями вида (11 и 12)

$$W_{i,j,k}(k, p, D) = R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^D \left( \left( e^{i \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \text{floor}(p) \right)} + m(p, k) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{k} \cdot p + D \left( \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{k} \right) \right)} \right) + \right. \\ \left. + \left( e^{j \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \text{floor}(q) \right)} + m(q, k) \cdot e^{j \left( \frac{2\pi}{k} \cdot q + D \left( \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{k} \right) \right)} \right) + \left( e^{\xi \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \text{floor}(\psi) \right)} + m(\psi, k) \cdot e^{\xi \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \psi + D \left( \frac{\pi}{2} \frac{\pi}{k} \right) \right)} \right) \right) \quad (11)$$

-решеточные сверхплотные упаковки кубической системы

$$\begin{aligned}
W_{i,j,k}(k, p, D) = & R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{k} \right)^D \left( e^{i \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \text{floor}(p) \right)} + e^{i \left( \frac{2\pi}{k} \cdot p + D \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{k} \right) \right)} \right) + \\
& + \left( e^{j \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \text{floor}(q) \right)} + e^{j \left( \frac{2\pi}{k} \cdot q + D \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{k} \right) \right)} \right) + \left( e^{\xi \left( \frac{2\pi}{k} \cdot \text{floor}(p) \right)} + e^{\xi \left( \frac{2\pi}{k} \cdot p + D \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{k} \right) \right)} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

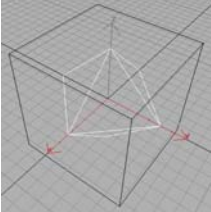
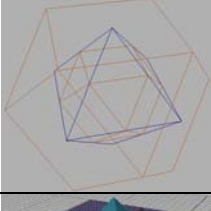
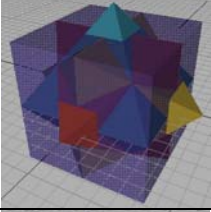
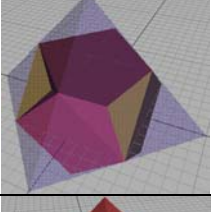
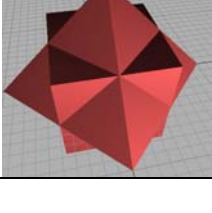
-сферические полостные сверхплотные упаковки кубической системы

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $j = \sqrt{-2}$ ;  $\xi = \sqrt{-3}$ ;

Однако, в известных автору специализированных программах математических вычислений, моделирование уравнений в кватернионной форме не возможно. Для графической проверки уравнений (12) потребуется создание специальной программы.

Для пояснения путей построения обобщенной формы описания плотнейших решеточных структур обратимся к рассмотрению геометрических представлений способов комплексных отображений самоподобных фракталов (рис.3), и к пояснению способа векторного представления их комплексных отображений в пространстве (рис. 3<sub>б</sub>) на примере фракталов – куб – октаэдр.

Табл. 2.

№ п.п.	Пространств. фрактония	Радиус рацион. сферы	Радиус иррацион. сферы	Координаты центров фрактализации
1		$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} \right)^{-2D}$	$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} \right)^{-(2D+1)}$	$R_0 \left( 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)^{-D} e^{i \left( \frac{2\pi}{6} \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot q + \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot D \right)}$ (17)
2		$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2D}$	$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2D+1}$	$R(D) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{6} \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot q + \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot D \right)}$ (18)
3		$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2D}$	$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2D+1}$	$R(D) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{6} \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot q + \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot D \right)}$ (19)
4		$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2D}$	$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2D+1}$	$R(D) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{6} \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot q + \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot D \right)}$ (20)
5		$R_0 \left( 2 \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2D}$	$R_0 \left( \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2D+1}$	$R(D) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{6} \cdot p + \frac{\pi}{2} \cdot q + \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) \cdot D \right)}$ (21)

Моделирование в программе MathCAD Professional 2000 комплекснозначных уравнений комплексных переменных записанных в символьном виде для описания графических топологий в сечениях абсолютного куба приведены в табл. 3.

Табл. 3

<p>Сечения трех D- слоев фрактальных топологий из рациональных сфер. (при графическом моделировании, окружности специально не доведены до конца, для демонстрации возможности поточечного построения)</p>	$Z(k,t,D,B) := R \cdot \left[ (\sqrt{B} - 1) \cdot e^{i \left[ \frac{2\pi \cdot \text{floor} \left[ \frac{\left[ \frac{c}{R \left( 2 \sin \left( \frac{\pi}{k} \right) \right)^{(D+1)} \right] t}{k} \right] - 1}{k} \right]} + \left[ \left( 2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{k} \right) \right)^{(D)} - 1 \right] \cdot e^{i \left[ \frac{2\pi \cdot \left[ \frac{c}{R \left( 2 \sin \left( \frac{\pi}{k} \right) \right)^{(D+1)} \right] t k - 1}{k} \right] + \frac{\pi(D+1)}{2} + \frac{\pi(1-D)}{k}} \right]} \right]$ <p>n := 4    m := 1    k := <math>\frac{n}{m}</math>    D := 0..2    B := 0..2</p>
<p>Сечения трех D- слоев фрактальных топологий из рациональных и иррациональных кубов.</p>	$m(k,t) := \frac{\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{k} \cdot [1 + 2 \cdot t - (2 \cdot \text{ceil}(t))]\right]}$ $Z(k,p,t,q,R) := \frac{2^{-q}}{\sqrt{2}} \cdot R \cdot \left[ \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{(-2q)} + \left(\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{(-2q)}} \cdot \left[ e^{i \left[ \frac{2\pi}{k} \cdot (p) \right]} + (m(k,t)) \cdot e^{i \left( \frac{2\pi}{k} \cdot t \right)} \right] \right]$ $ZZ(k,p,t,q,R) := \frac{2^{-q}}{\sqrt{2}} \cdot R \cdot \left[ \sqrt{\left(\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{(-2q)} + \left(\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{(-2q)}} \cdot \left[ e^{i \left[ \frac{2\pi}{k} \cdot (p-1) + \frac{\pi}{k} \right]} + (m(k,t)) \cdot e^{i \left[ \frac{2\pi}{k} \cdot (t-1) + \frac{\pi}{k} \right]} \right] \right]$ <p>k := 4    M := 2 · k    p := 0..M    t := 0,001..M    R := 1.25    q := -3..6</p>

## ВЫВОДЫ

По результатам построения математической модели квазирегулярных, регулярных и фрактальных структур пространства и их привязки к сеточным и решетчатым структурам числового континуума можно сделать следующие выводы:

- В основе всех перечисленных структур лежат законы симметрии.
- Все перечисленные структуры можно классифицировать обобщенными характеристиками Эйлера

- $N_{m,n,k} = R + I - j$  -линейная (1D) характеристика
- $N_{m,n,k}^2 = T + F - I + j$  -площадная (2D) характеристика
- $N_{m,n,k}^3 = (T + F + R) / 2$  -объемная (3D) характеристика

где  $N$  – число информационных осей симметрии.

$d$ - топологическая размерность характеристики;

$T$  – число вершин;

$F$  – число граней;

$R$  – число ребер многогранников.

$j$  – параметрический индекс

- Геометрическое (векторное) описание  $D$  – мерных пространственных и числовых структур (где  $D = d + p$ ;  $d$  – число пространственных координат,  $p = I - j$  – число параметрических координат) хорошо согласуется с комплекснозначными параметрическими уравнениями как действительных, так и комплексных переменных, записываемых в символьном виде. Эти уравнения нами названы уравнениями геометрического поля пространственных частот.

- Уравнения геометрического поля пространственных частот описывают все возможные пространственные конфигурации в  $D$  – мерных полярных координатах.

- Фазовый параметр  $\varphi$  в этом математическом аппарате записываются в радианной мере и характеризует для каждой размерности  $d$  способ разбиения пространства на числа информационных осей в зависимости от выбранной пространственной конфигурации, характеризуемой коэффициентами фрактальности  $k, q$  и т.д.

- Часть из выделенных информационных осей симметрии соотносится с нулевым центром симметрии; остальные соотносятся с периферийными центрами симметрии и центрами фрактализации.

- Параметрический рост квазирегулярных, регулярных и фрактальных структур соотносится в геометрическом поле пространственных частот с конкретными пространственно – временными параметрическими координатами, выступающими в роли упорядоченной системы концентрических (относительно нулевого и периферийных центров) сферических оболочек.

Общие описания регулярных и фрактальных пространственных структур имеют свои решения в кватернионной и октавных формах их представления.

В представленной физико-математической модели найдены частные описания целого ряда регулярных и фрактальных структур плотной, сверх-плотной и простейшей укладок в гипер-комплексной символьной форме. И показана возможность вывода обобщенных уравнений.

## Список литературы:

1. Г.С. Мельников. Математическая модель классификации трансформаций многогранников с позиций минимизированной обобщенной Эйлеровой характеристики. «Оптика и спектроскопия», рег.№ 133 от 6.05.2003г. (в печати).
2. Г.С. Мельников. Физико-математическая модель плотной простой кубической упаковки пространства. «Оптика и спектроскопия», рег.№ 134 от 6.05.2003г. (в печати)
3. Г.С. Мельников, И.Н. Серов, Н.Б. Егорова, А.А. Ошарин. Физико-математическая модель сверх-плотной фрактальной упаковки пространства по топологии «абсолютного» куба «Aires», «Оптика и спектроскопия», рег.№ 135 от 6.05.2003г. (в печати).
4. Г.С. Мельников. Вывод и моделирование уравнений геометрического поля пространственных частот. «Оптика и спектроскопия», рег.№ 136 от 6.05.2003г. (в печати).
5. Г.С. Мельников. А.А. Ошарин. Экспериментальное подтверждение выводов по физико-математическому моделированию решетчатых и шаровых упаковок пространства и моделированию уравнений геометрического поля пространственных частот. «Оптика и спектроскопия», рег.№ 138 от 6.05.2003г. (в печати)
6. Н.А. Стрелков. Критерий асимптотической оптимальности проекционно-сеточных подпространств. Мат. заметки, т. 52, №4, 1992г, стр. 89 – 98.
7. Н.А. Стрелков. Оптимальные координатные функции в проекционных разностных методах, поперечники и решетчатые укладки. Докл. АН СССР, т. 309, №3, 1989г, стр. 550 – 554.
8. Н.А. Стрелков. Проекционно-сеточные поперечники и решетчатые укладки. Мат. сборник, т.182, №10, 1991г, стр. 1513 – 1533.
9. К. Роджерс. Укладки и покрытия. М., изд-во Мир, 1968, 134 с.
10. С.Л. Соболев. Мат. сборник, т. 4, 1938г, стр. 471 – 497.
11. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 2-е изд., Новосибирск, 1962г.
12. С.М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., изд-во ГРФМЛ, 1969г.
13. И.Н. Серов. Аналитическое программирование информационно обменных процессов активных биологических форм. Общий курс ВПР «AIRES» С-Петербург, 2002, Изд-во Акцидент.
14. Оптический фрактально матричный фильтр «Айрэс» ТУ.4491-003-48971233-2001. Утверждены «Центр нормативно-информационных систем», г. С-Петербург, 2001.
15. Gennady S. Melnikov. Gnoseology of fractality – fractal optics // Proc. SPIE, Vol.3010, 1997, p.58-68. Diffractive and Holographic Device Technologies and Applied Optics IV.
16. Мельников Г.С., Ларионов С.А., Михеев П.А., Цветков Е.А.// Изв. А.Н., Серия физическая. М., 1995. т. 59, N 12. С.143..150.
17. Г.С. Мельников. Поверхности текущих фокусов в семействах каустических лучей многократного отражения от рефлекторов цилиндрического и сферического типов. // “Оптический журнал” т.66, №1, с73-79, С-Пб, ГОИ, 1999г.
18. Г.С. Мельников, А.С. Попов. Каустические поверхности при отражении и преломлении сферой гомоцентрических пучков лучей // “Оптический журнал”, т. 65, №4, с82...85, С-Пб, ГОИ, 1998г.

19. Г.С. Мельников. Теоретическое и экспериментальное исследование фокусировки излучения оптическим шаром методами аналитических комплексных функций. В сб. Фонда "AIRES" Введение во фрактальную оптику и оптику матричных транспарантов. С-Петербург, 2002г. , стр. 11-72.
20. Балк М.Б., Балк Г.Д., Полухин А.А. Реальное применение мнимых чисел. Из-во «Радянська Школа», Киев, 1988.
21. Е.С. Федоров Начала учения о фигурах, изд-во АН СССР, 1953г., 409 с.
22. Fuller R. Buckmister "Synergetics", 1982. Macmillan Publishing Company, 866 Third Avenue, New York, NY10022.
23. Fuller R. Buckmister "Cosmografy", 1991. Macmillan Publishing Company.
24. Г.Ф. Вороной. Исследования о примитивных параллелоэдрах. Собр. соч. Т2, Киев, Изд. АН УССР, 1952.
25. Б.Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел М.-Л., Изд. АН СССР, 1947, с.196-316
26. Н.Н. Медведев. Метод Вороного-Делоне в исследовании структуры некристаллических систем. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2000г
27. Г.В. Веселаго, ЖЭТФ 52, 1025 (1965).
28. Pendry, J. V. *Phys.Rev.Lett.* **85**, 3966–3969 (2000).
29. Smith, D. R., Schurig, D. & Pendry, J. V. *Appl. Phys. Lett.* **81**, 2713–2715 (2002).
30. . Luo, C., Johnson, S. G., Joannopoulos, J. D. & Pendry, J. V. *Phys.Rev.* **B65**, 201104 (2002).
31. Г.С. Мельников, И.Н. Серов. Способ создания управляемых пространственно-частотных фильтров и дифракционных решеток с вариоугловой подстройкой. Программа V Международной конференции Прикладная Оптика, Секция 1, Заседание 4, г. Санкт- Петербург 2002г., стр.11.