

должны были бы отскочить с одинаковой скоростью. Но на опыте этого не происходит.

Итак, даже если шары висят вплотную друг к другу, их взаимодействие нужно рассматривать как последовательность отдельных соударений друг с другом.

Результат опыта с тремя шарами нельзя, разумеется, безоговорочно переносить на рассматриваемое столкновение шара с клином и плоскостью, так как и условия опыта, и взаимодействующие тела здесь другие. Однако и здесь можно попробовать рассмотреть два последовательных столкновения: шара с клином и клина с Землей. При этом запись законов сохранения несколько изменится. Уравнение (1), выражающее сохранение горизонтальной составляющей импульса, остается без изменения и в том случае, когда мы рассматриваем только первое столкновение — шара с клином. Но уравнение (2) для вертикальной составляющей импульса должно быть заменено другим, так как после первого удара движется только клин, а не клин вместе с Землей:

$$mv_1 = MV_1. \quad (6)$$

Закон сохранения энергии для первого удара запишется в виде

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{M(V^2 + V_1^2)}{2}. \quad (7)$$

Выражая V из уравнения (1), V_1 из уравнения (6) и подставляя в (7), получаем

$$v_1^2 = v^2 \frac{M - m}{M + m}. \quad (8)$$

Видно, что значение вертикальной скорости отскочившего шара v_1 , даваемое выражением (8), меньше значения v_1 из прежнего ответа (5). Это и понятно, ибо теперь клин после первого удара имеет кинетическую энергию, связанную не только с его движением по горизонтали, но и по вертикали. Конечно, приобретя вертикальную составляющую скорости в результате первого удара, клин не успевает переместиться по вертикали, так как сразу же происходит второе столкновение — клина с Землей. Так как по условию после столкновения клин скользит по горизонтали (а не подскакивает вверх), то его столкновение с Землей следует считать неупругим. Вертикальная скорость клина гасится при этом столкновении, а соответствующая часть кинетической энергии клина превращается в тепло.

Если бы удар клина о Землю был абсолютно упругим, то вертикальная составляющая скорости клина V_1 изменила бы свое направление на противоположное и клин подскочил бы вверх на некоторую высоту вслед за шаром.

Значение скорости отскочившего шара v_1 из (8) также удовлетворяет предельному случаю $m \ll M$, когда $v_1 = v$. Такое решение этой задачи тоже встречается в некоторых задачниках. Сравнивая ответы (5) и (8), мы видим, что по их форме трудно отдать предпочтение какому-либо из приведенных решений. Действительно, оба они удовлетворяют предельному условию $m \ll M$. Обратим внимание на то, что как формула (5), так и формула (8) имеют смысл только при $m < M$, т. е. когда масса клина больше, чем масса шара. Это означает, что при $M < m$ шар не может отскочить от клина вертикально вверх. Поэтому и условие задачи будет непротиворечивым, только если шар легче клина.

Этот вывод связан с тем, что в общем случае при упругом столкновении движущегося тела с неподвижным изменение направления движения налетающего тела в результате удара может быть любым только тогда, когда масса налетающего тела меньше массы «мишени». Если же масса «снаряда» m больше, чем масса «мишени» M , то «снаряд» не может отклониться на угол, превышающий $\varphi_{\max}$, который находится из соотношения

$$\sin \varphi_{\max} = M/m.$$

При $M < m$ этот предельный угол всегда меньше $\pi/2$.

Итак, сама форма ответов не дает возможности выбрать из них правильный. Соответствие предельным случаям — это необходимое условие правильности ответа, но, разумеется, недостаточное. Можно попробовать поставить дополнительные вопросы, ответ на которые помог бы выбрать правильное решение. Например, здесь можно задать вопрос, какой угол α должна составлять наклонная грань клина с горизонтальной, чтобы шар действительно отскочил вертикально вверх.

Построим вектор изменения импульса шара при столкновении $\Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}$ (рис. 23.3). Это изменение импульса вызывается силой, действующей на шар со стороны наклонной грани клина. Поскольку удар упругий и трение отсутствует, то эта сила обязательно направлена перпендикулярно поверхности клина. Теперь из рис. 23.3 сразу видно, что $\operatorname{tg} \alpha = v/v_1$. Так как $v_1 \leq v$, то $\alpha \geq \pi/4$, где знак равенства соответствует предельному случаю.

Значение v_1 в приведенных двух решениях задачи получилось разным, поэтому разным будет и угол α . Однако предельное значение α при $m \ll M$ в обоих случаях одинаково, и мы опять не можем отдать предпочтение одному из ответов.

Так какой же ответ все-таки правильный? Чтобы разобраться в этом, придется внимательно проанализировать условия применимости тех допущений, которые были сделаны при решении задачи.

Для этого необходимо гораздо глубже вникнуть в механизм энергетических превращений при упругих столкновениях. Поэтому сначала в нескольких следующих задачах будут рассмотрены более простые примеры, а затем мы вернемся к поставленному вопросу. ▲

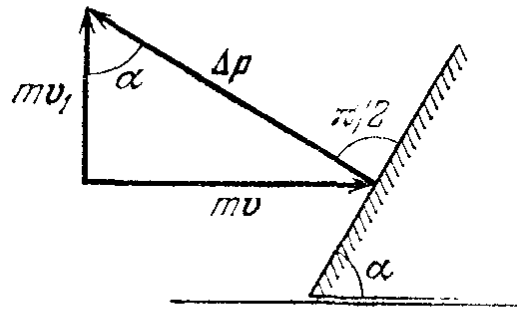
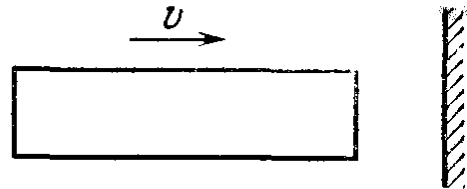


Рис. 23.3. К вычислению угла наклона грани клина

24. Длительность удара. Оценить время упругого удара твердых тел, рассматривая столкновение стержня, налетающего торцом на неподвижную недеформируемую стенку (рис. 24.1).

Рис. 24.1. Столкновение стержня со стенкой



△ В предыдущей задаче мы считали, что упругий удар твердых тел происходит мгновенно. Но совершенно очевидно, что это предположение является идеализацией. Столкновение реальных тел всегда занимает конечный промежуток времени τ . В самом деле, если бы изменение импульса тела при столкновении происходило мгновенно, то сила взаимодействия тел при ударе была бы бесконечно большой, чего, естественно, не бывает. От чего же может зависеть длительность столкновения? Допустим, что мы рассматриваем отражение упругого тела от недеформируемой стенки. При столкновении кинетическая энергия тела в течение первой половины столкновения превращается в потенциальную энергию упругой деформации тела. В течение второй половины происходит обратное превращение энергии деформации в кинетическую энергию отскакивающего тела.

Поэтому очевидно, что упругие свойства тела играют определенную роль при столкновении.

Итак, можно ожидать, что длительность удара зависит от модуля Юнга материала тела E , его плотности ρ и его геометрических размеров. Возможно, что длительность удара τ зависит и от скорости v , с которой тело налетает на преграду.

Нетрудно убедиться, что оценить время столкновения с помощью одних только соображений размерности не удастся. Действительно, если даже взять в качестве налетающего тела шар, размеры которого характеризуются только одним параметром — радиусом R , то из величин E , ρ , R и v можно составить бесчисленное множество выражений, имеющих размерность времени:

$$\tau = R \sqrt{\frac{\rho}{E}} f\left(\frac{\rho v^2}{E}\right), \quad (1)$$

где f — произвольная функция безразмерной величины $\rho v^2/E$. Поэтому для нахождения τ необходимо динамическое рассмотрение. Проще всего такое рассмотрение провести для тела, имеющего форму длинного стержня.

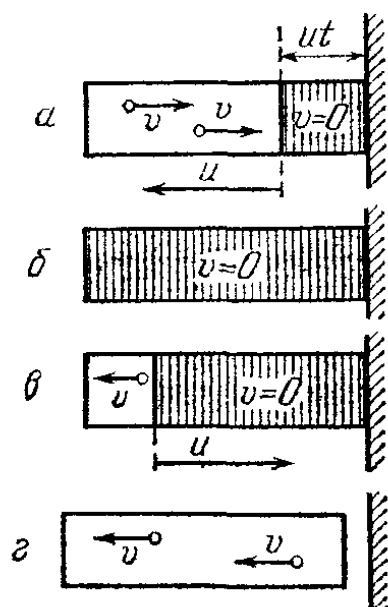


Рис. 24.2. Распространение волны упругой деформации в стержне при ударе о стенку. Фронт волны деформации движется со скоростью звука u

Пусть стержень, движущийся со скоростью v , налетает торцом на неподвижную стенку. При соприкосновении торцевого сечения стержня со стенкой скорости лежащих в этом сечении частиц стержня мгновенно обращаются в нуль. В следующий момент времени останавливаются частицы, расположенные в соседнем сечении, и т. д. Участок стержня, частицы которого к данному моменту уже остановились, находится в деформированном состоянии. Дру-

гими словами, в этот момент времени деформированной оказывается та часть стержня, до которой дошла волна упругой деформации, распространяющаяся по стержню от места контакта с преградой. Эта волна деформации распространяется по стержню со скоростью звука u . Если считать, что стержень пришел в соприкосновение со стенкой в момент времени $t=0$, то в момент времени t длина сжатой части стержня равна ut . Эта часть стержня на рис. 24.2а заштрихована. В незаштрихованной части стержня скорости всех его частиц по-прежнему равны v , а в сжатой (заштрихованной) части стержня все частицы покоятся.

Первый этап процесса столкновения стержня со стенкой закончится в тот момент, когда весь стержень окажется деформированным, а скорости всех его частиц обратятся в нуль (рис. 24.2б). В этот момент кинетическая энергия налетающего стержня целиком превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Сразу после этого начинается второй этап столкновения, при котором стержень возвращается в недеформированное состояние. Этот процесс начинается у свободного конца стержня и, распространяясь по стержню со скоростью звука, постепенно приближается к преграде. На рис. 24.2в стержень показан в тот момент, когда незаштрихованная часть уже не деформирована и все ее частицы имеют скорость v , направленную влево. Заштрихованный участок по-прежнему деформирован, и скорости всех его частиц равны нулю.

Конец второго этапа столкновения наступит в тот момент, когда весь стержень окажется недеформированным, а все частицы стержня приобретут скорость v , направленную противоположно скорости стержня до удара. В этот момент правый конец стержня отделяется от преграды: недеформированный стержень отскакивает от стенки и движется в противоположную сторону с прежней по модулю скоростью (рис. 24.2г). Энергия упругой деформации стержня при этом целиком переходит обратно в кинетическую энергию.

Из изложенного ясно, что длительность столкновения τ равна времени прохождения фронта волны упругой деформации по стержню туда и обратно:

$$\tau = 2l/u, \quad (2)$$

где l — длина стержня.

Определить скорость звука в стержне u можно следующим образом. Рассмотрим стержень в момент времени t (рис. 24.2а), когда волна деформации распространяется вле-

во. Длина деформированной части стержня в этот момент равна ut . По отношению к недеформированному состоянию эта часть укоротилась на величину ut , равную расстоянию, пройденному к этому моменту еще недеформированной частью стержня. Поэтому относительная деформация этой части стержня равна v/u . На основании закона Гука

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (3)$$

где S — площадь поперечного сечения стержня, F — сила, действующая на стержень со стороны стенки, E — модуль Юнга. Поскольку относительная деформация v/u одинакова во все моменты времени, пока стержень находится в контакте с преградой, то, как видно из формулы (3), сила F постоянна. Для нахождения этой силы применим закон сохранения импульса к остановившейся части стержня. До контакта с преградой рассматриваемая часть стержня имела

импульс $\rho S u t \cdot v$, а в момент времени t ее импульс равен нулю. Поэтому

$$\rho S u t \cdot v = F t. \quad (4)$$

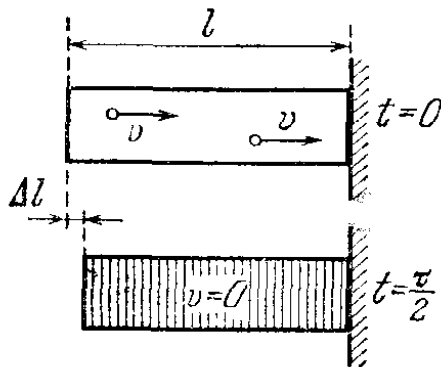
Подставляя отсюда силу F в формулу (3), получаем

$$u = \sqrt{E/\rho}. \quad (5)$$

Теперь выражение для времени τ столкновения стержня со стенкой (2) принимает вид

$$\tau = 2l \sqrt{\rho/E}. \quad (6)$$

Рис. 24.3. Деформация стержня при ударе о стенку



Время столкновения τ можно найти и иначе, воспользовавшись для этого законом сохранения энергии. Перед столкновением стержень недеформирован и вся его энергия — это кинетическая энергия поступательного движения $mv^2/2$. Спустя время $\tau/2$ с начала столкновения скорости всех его частиц, как мы видели, обращаются в нуль, а весь стержень оказывается деформированным (рис. 24.2б). Длина стержня уменьшилась на величину Δl по сравнению с его недеформированным состоянием (рис. 24.3). В этот момент вся энергия стержня — это энергия его упругой деформации. Эту энергию можно записать в виде $k(\Delta l)^2/2$, где k — коэффициент пропорциональности между силой и деформацией: $F = k\Delta l$. Этот коэффициент с помощью закона Гука выража-

ется через модуль Юнга E и размеры стержня:

$$k = ES/l. \quad (7)$$

Максимальная деформация Δl равна тому расстоянию, на которое перемещаются частицы левого конца стержня за время $\tau/2$ (рис. 24.3). Так как эти частицы двигались со скоростью v , то

$$\Delta l = v\tau/2. \quad (8)$$

Приравниваем кинетическую энергию стержня до удара и потенциальную энергию деформации. Учитывая, что масса стержня $m = \rho Sl$, и используя соотношения (7) и (8), получаем

$$\frac{\rho S l v^2}{2} = \frac{ES}{2l} \left(v \frac{\tau}{2} \right)^2,$$

откуда для τ снова получаем формулу (6). Это время столкновения обычно очень мало. Например, для стального стержня ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³) длиной 28 см вычисление по формуле (6) дает $\tau = 10^{-4}$ с.

Силу F , действующую на стенку во время удара, можно найти, подставляя скорость звука в стержне (5) в формулу (4):

$$F = Sv \sqrt{\rho E}. \quad (9)$$

Видно, что сила, действующая на стенку, пропорциональна скорости стержня перед ударом. Но для применимости приведенного решения необходимо, чтобы механическое напряжение стержня F/S не превосходило предела упругости материала, из которого изготовлен стержень. Например, для стали предел упругости

$$(F/S)_{\max} = 4 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Поэтому максимальная скорость v стального стержня, при которой его соударение с преградой все еще можно считать упругим, оказывается согласно формуле (9) равной 10 м/с. Это соответствует скорости свободного падения тела с высоты всего лишь 5 м. Укажем для сравнения, что скорость звука в стали $u = 5000$ м/с, т. е. $v \ll u$.

Время столкновения стержня с неподвижной преградой (в отличие от силы) оказалось не зависящим от скорости стержня. Этот результат, однако, не является универсальным, а связан со специфической формой рассматриваемого тела. Например, для упругого шара время столкновения со стенкой зависит от его скорости. Динамическое рассмотре-

ние этого случая оказывается более сложным. Связано это с тем, что и площадь соприкосновения деформированного шара со стенкой, и действующая на шар сила в процессе столкновения не остаются постоянными. ▲

25. Столкновение двух стержней. Решение предыдущей задачи можно использовать и для нахождения длительности продольного соударения двух одинаковых упругих стержней.

△ Рассмотрим, например, случай, когда движущийся со скоростью v стержень налетает на неподвижный. В системе



Рис. 25.1. Столкновение двух одинаковых стержней в системе отсчета, связанной с центром масс

отсчета, где неподвижен центр масс системы стержней, они движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями $v/2$ (рис. 25.1). При столкновении общий центр масс стержней находится в

том сечении, где они соприкасаются. Так как этот центр масс неподвижен, то для каждого стержня процесс столкновения происходит точно так же, как и при ударе о неподвижную стенку. Картину распространения волн упругой деформации в стержнях и распространения скоростей частиц стержней в разные моменты времени можно получить, если пририсовать к рис. 24.2 предыдущей задачи правую часть, являющуюся его зеркальным отражением в плоскости стенки. Это показано на рис. 25.2. Видно, что после столкновения в системе центра масс стержни будут двигаться в противоположных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями $v/2$, причем деформации в них будут отсутствовать.

Для того чтобы получить эту же картину в лабораторной системе отсчета, необходимо к скоростям всех частиц прибавить скорость центра масс $v/2$. В результате для тех же моментов времени, что и на рис. 25.2, получается картина, изображенная на рис. 25.3. Как и в случае мгновенного удара, налетающий стержень останавливается, а неподвижный до удара стержень приходит в движение со скоростью v .

Несколько сложнее обстоит дело в случае продольного соударения двух стержней разной длины. К моменту отскока полностью избавиться от деформации успеет только более короткий стержень. Так как второй стержень начнет свободное движение после отскока еще частично деформи-

рованным, то дальше в нем будут происходить продольные упругие колебания. Часть механической энергии системы окажется связанной с этими колебаниями. Вследствие внутреннего трения колебания постепенно затухнут, и в результате полная механическая энергия стержней после удара окажется меньше, чем до удара. А между тем удар был абсолютно упругим!

Рассмотрим теперь соударение стержней разной длины более подробно. Пусть, например, стержни изготовлены из

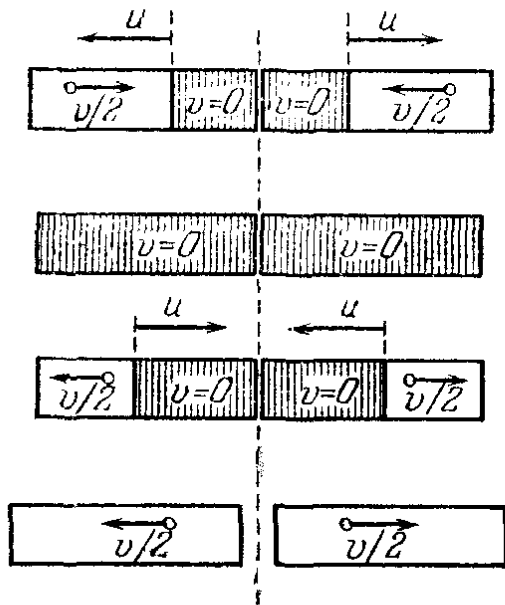


Рис. 25.2. Распространение волн упругой деформации и распределение скоростей частиц при столкновении одинаковых стержней в системе центра масс

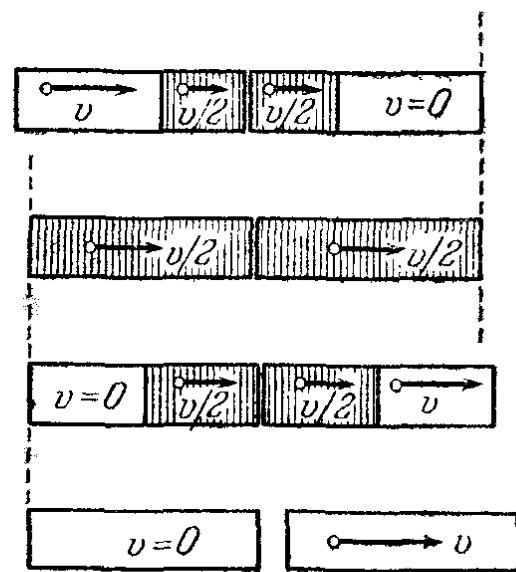


Рис. 25.3. То же в лабораторной системе отсчета

одного и того же материала и имеют одинаковое поперечное сечение, но один из них вдвое длиннее другого.

Процесс соударения этих стержней удобно рассматривать в той системе отсчета, где они движутся с одинаковыми по модулю скоростями навстречу друг другу (рис. 25.4).



Рис. 25.4. Столкновение стержней разной длины

Нетрудно сообразить, что начальная стадия столкновения и в этом случае будет происходить точно так же, как и при соударении одинаковых стержней (рис. 25.5a). Действи-

тельно, в момент соприкосновения торцов стержней в каждом из них начинает распространяться волна упругой деформации. Те точки стержней, до которых фронт волны деформации еще не дошел, ничего «не знают» о том, что уже началось столкновение, и продолжают двигаться так же, как и до начала столкновения. Поэтому различие в длинах стержней начнет проявляться только тогда, когда волна сжатия достигнет конца короткого стержня (рис. 26.5б). В длинном стержне волна сжатия успеет дойти при этом только до его середины.

Начиная с этого момента, процессы в стержнях будут различаться. Так как при распространении упругих волн взаимодействуют между собой только соседние участки среды, то в длинном стержне волна сжатия и дальше будет продолжать распространяться в том же направлении, а короткий стержень начинает возвращаться в недеформированное состояние (рис. 25.5в). Этот процесс начинается у свободного (левого) конца короткого стержня и постепенно приближается к месту контакта стержней. Все частицы в освободившемся от деформации участке короткого стержня движутся налево с одинаковой скоростью v .

В тот момент, когда волна сжатия достигает свободного (правого) конца длинного стержня, короткий стержень оказывается полностью недеформированным (рис. 25.5г). При этом скорости всех точек длинного стержня равны нулю, а скорости всех точек короткого стержня равны v и направлены влево. В этот момент все упругие процессы в коротком стержне заканчиваются, а в длинном начинается процесс возвращения в недеформированное состояние. Этот процесс развивается с обоих концов стержня, так как взаимодействие между длинным стержнем и коротким, освободившимся от деформации, отсутствует. Частицы длинного стержня в освобождающихся от деформации участках вблизи его краев имеют скорости v , направленные так, как показано на рис. 25.5,д. Стержни все еще находятся в контакте, но уже не действуют друг на друга. Силы взаимодействия между стержнями отсутствуют, потому что соприкасающиеся участки стержней уже не деформированы, но стержни еще не разъединяются, так как эти их участки имеют одинаковые скорости. Другими словами, соударение стержней на этом заканчивается, хотя они еще некоторое время будут соприкасаться.

Таким образом, длительность взаимодействия стержней при столкновении равна $2l/v$, где l — длина короткого

стержня, а u — скорость звука. Нетрудно найти и время, в течение которого стержни соприкасаются друг с другом. Для этого рассмотрим дальнейшие процессы, происходящие в длинном стержне.

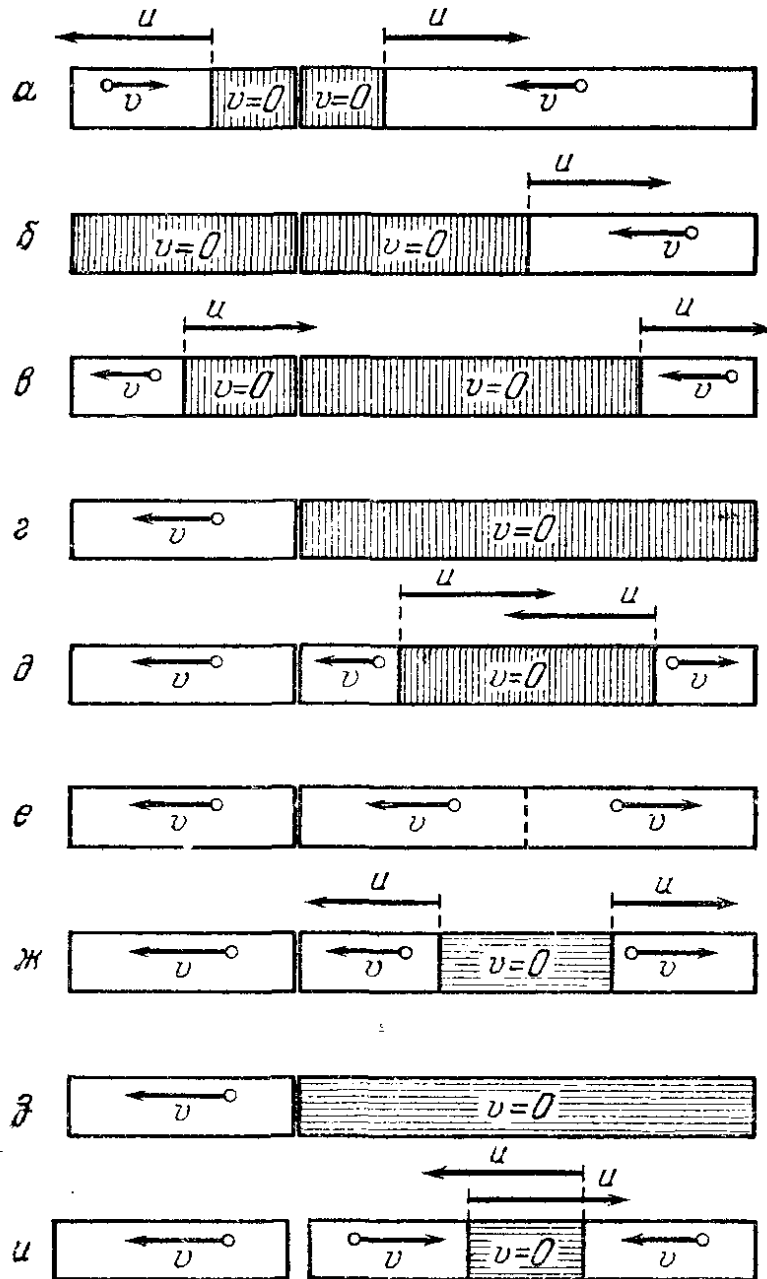


Рис. 25.5. Распространение волны упругой деформации и распределение скоростей частиц при столкновении стержней разной длины. Сжатие стержней показано вертикальными штрихами, а растяжение — горизонтальными. Изменение длины стержней при их деформации не показано

В тот момент, когда длинный стержень полностью освободится от деформации, скорости всех его частиц слева от середины стержня будут направлены влево, а скорости всех частиц правой половины стержня — вправо (рис. 25.5е).

Поэтому в обе стороны от середины стержня начнет распространяться волна растяжения (рис. 25.5ж). В растянутой части стержня, которая на этом рисунке заштрихована, скорости частиц стержня равны нулю, а вне этой части по-прежнему равны v .

Когда волна растяжения достигнет концов стержня, скорости всех его частиц обратятся в нуль (рис. 25.5з). С этого момента короткий стержень перестанет касаться левого конца длинного стержня. Таким образом, с момента прекращения взаимодействия стержней до их разделения проходит еще время, равное $2l/u$. Поэтому полное время пребывания стержней в контакте равно $4l/u$.

Дальше растянутый длинный стержень опять начинает освобождаться от деформации (рис. 25.5и), и т. д. Такие чередующиеся волны сжатия и растяжения можно рассматривать как продольные колебания стержня, при которых в выбранной системе отсчета его середина стоит на месте. До столкновения стержни обладали только кинетической энергией поступательного движения. После столкновения кинетическая энергия короткого стержня такая же, как и до столкновения, так как изменилось только направление скорости стержня. Кинетическая энергия поступательного движения длинного стержня после столкновения равна нулю, так как он как целое покоится. Это значит, что энергия возникших в стержне колебаний равна его первоначальной кинетической энергии.

Таким образом, модель абсолютно упругого удара материальных точек, в которой принимается, что кинетическая энергия сталкивающихся тел сохраняется, оказывается совершенно неприменимой в случае столкновения упругих стержней разной длины. В самом деле, рассматривая стержни как материальные точки с массами m и $2m$ и применяя к их столкновению законы сохранения энергии и импульса, мы получили бы, что точка массы m после столкновения двигалась бы влево со скоростью $5v/3$, а точка массы $2m$ — направо со скоростью $v/3$. ▲

26. Столкновение трех стержней. Разобранный пример столкновения двух стержней, один из которых вдвое длиннее другого, позволяет легко выяснить, как происходит столкновение трех одинаковых стержней.

△ Будем считать, что длинный стержень в предыдущем примере на самом деле составлен из двух одинаковых коротких стержней (2 и 3 на рис. 26.1). Отметим прежде всего,

что до тех пор пока в длинном стержне распространяется только волна сжатия (рис. 25.5а — е предыдущего примера) тот факт, что он состоит из двух отдельных кусков, не играет никакой роли в происходящих процессах.

Ясно, что взаимодействие стержней 2 и 3 начинается в тот момент, когда волна сжатия, распространяясь по



Рис. 26.1. Столкновение трех одинаковых стержней

стержню 2, достигает его границы со стержнем 3. Это происходит спустя промежуток времени l/u после начала столкновения стержней 1 и 2. Спустя еще промежуток времени l/u взаимодействие стержней 1 и 2 прекращается, а стержней 2 и 3 — продолжается. Рассмотрим тот момент, когда длинный стержень, освобождаясь от сжатия, оказы-

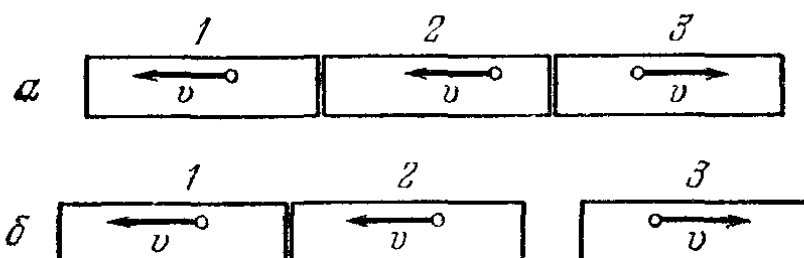


Рис. 26.2. Распределение скоростей частиц стержней после того, как стержни освободились от деформации

вается недеформированным. Этому моменту соответствует рис. 25.5е предыдущего примера. В этот момент скорости всех частиц стержня 2 направлены влево, а стержня 3 — вправо (рис. 26.2а). Так как эти стержни не соединены друг с другом, то никакой волны растяжения, разумеется, не возникает: стержни 2 и 3 просто удаляются друг от друга. При этом стержни 1 и 2 остаются в контакте друг с другом, так как движутся с одинаковыми скоростями налево (рис. 26.2б). Разделение стержней 2 и 3 происходит спустя промежуток времени $2l/u$ после начала их взаимодействия, т. е. спустя время l/u после прекращения взаимодействия стержней 1 и 2.

Из сравнения рис. 26.1 и 26.2б видно, что результат столкновения сводится к тому, что крайние стержни 1 и 3 изменили направления своих скоростей на противоположные, а скорость среднего стержня 2 осталась без изменения.

Кинетическая энергия поступательного движения стержней при таком тройном столкновении остается без изменения. Никаких колебаний после окончания соударения в стержнях не происходит. Поэтому для рассмотренного столкновения применима модель двух последовательных абсолютно упругих столкновений: сначала первого тела со вторым, а затем второго с третьим.

Выясним теперь, как будет выглядеть это столкновение в той системе отсчета, в которой соприкасающиеся стержни 2 и 3 покоятся, а стержень 1 налетает на них. Для перехода в

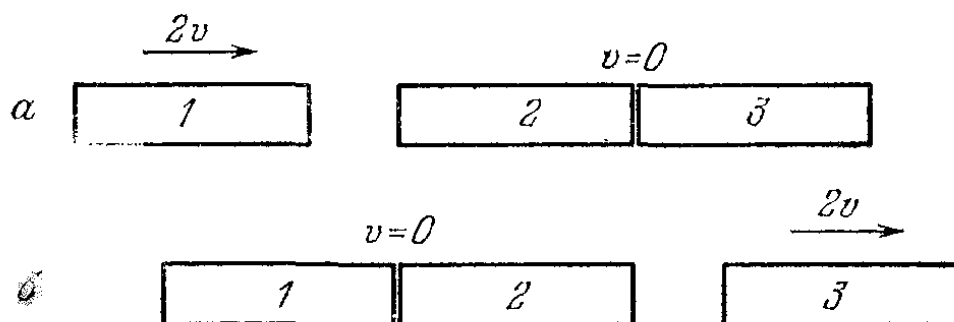


Рис. 26.3. Стержень 1 налетает на покоящиеся стержни 2 и 3

такую систему отсчета нужно к скоростям всех тел прибавить одну и ту же скорость v , направленную вправо. С помощью рис. 26.1 и 26.2б видим, что в этой системе отсчета до удара стержень 1 движется со скоростью $2v$, а стержни 2 и 3 покоятся (рис. 26.3а). После удара покоятся стержни 1 и 2, а стержень 3 движется со скоростью $2v$ направо (рис. 26.3б).

Приведенный подробный анализ столкновения трех одинаковых стержней позволяет понять результат упоминавшегося выше опыта с отскоками подвешенных на нитях упругих шаров (рис. 23.2.)

Из разобранных примеров ясно, что соударения нескольких упругих тел нужно рассматривать как последовательность отдельных столкновений. Для того чтобы применять к этим столкновениям упругих тел модель абсолютно упругого удара, нужно быть уверенным в том, что после прекращения столкновения в телах не происходит колебаний. ▲

27. Упругий шар и стенка. В задаче 24 уже отмечалось, что столкновение шара с недеформируемой стенкой происходит не совсем так, как столкновение стержня со стенкой. Главная причина различия заключается в том, что в процессе соударения площадь области контакта шара со стенкой не остается постоянной.

Это различие проявляется даже в статическом случае, когда упругое тело прижимается к недеформируемой стенке постоянной внешней силой. Деформация стержня, поперечное сечение которого одинаково по всей длине, будет при этом однородной, и потенциальная энергия упругой деформации будет равномерно распределена по всему объему стержня.

При статической деформации шара, прижатого к стенке, характер распределения деформации будет совсем иным. Деформация материала шара уже не будет однородной. Наиболее сильно будут деформированы участки шара вблизи стенки. Чем дальше от стенки, тем меньшей будет деформация. При этом оказы-

вается, что деформация эффективно проникает в шар на сравнительно небольшую глубину и охватывает только некоторую часть шара, объ-

ем которой мал по сравнению с объемом всего шара. Потенциальная энергия деформации будет сосредоточена в малой области шара, непосредственно примыкающей к стенке.

Понять такой характер деформации шара и распределения потенциальной энергии по его объему можно, рассматривая сжатие двух последовательно соединенных пружин разной жесткости (рис. 27.1). Пусть жесткость первой пружины равна k_1 , второй — k_2 . Пружины сжимаются силой F , которая при последовательном соединении пружин в любом сечении одинакова. Деформации пружин x_1 и x_2 связаны с силой F и коэффициентами k_1 и k_2 обычными соотношениями

$$F = k_1 x_1, \quad F = k_2 x_2. \quad (1)$$

Потенциальные энергии деформированных пружин пропорциональны квадратам их деформаций:

$$W_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2}, \quad W_2 = \frac{k_2 x_2^2}{2}. \quad (2)$$

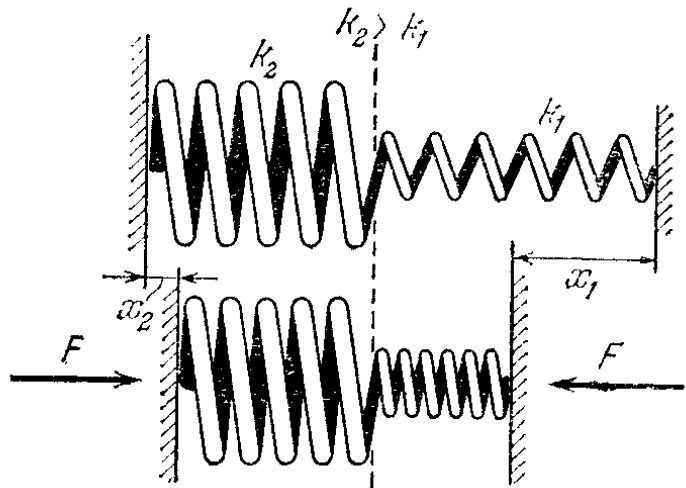


Рис. 27.1. Пружины разной жесткости

Из соотношений (1) следует, что деформации пружин обратно пропорциональны их жесткостям. Поэтому для отношения энергий W_1 и W_2 с помощью (2) находим

$$W_1/W_2 = k_2/k_1. \quad (3)$$

Видно, что при последовательном соединении пружин запасенная каждой пружиной энергия обратно пропорциональна ее жесткости: чем мягче пружина, тем большая часть энергии деформации пружин сосредоточена в ней. В

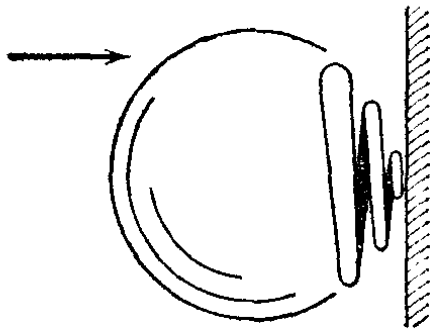


Рис. 27.2. Качественная модель столкновения шара со стенкой

предельном случае, когда жесткость одной из пружин стремится к бесконечности (т. е. ее можно считать абсолютно твердым, недеформируемым телом), вся потенциальная энергия деформации оказывается сосредоточенной в другой пружине.

Процесс столкновения шара с недеформируемой стенкой можно представить себе следующим образом. Сначала шар касается стенки в одной точке, затем по мере деформации шара область контакта увеличивается. А это означает, что испытывающую деформацию часть шара качественно можно рассматривать как упругую пружину, жесткость которой возрастает с увеличением сжатия. Это условно показано на рис. 27.2. Энергия деформации будет в основном сосредоточена в той части пружины, которая имеет наименьшую жесткость и испытывает наибольшую деформацию, т. е. в малой части шара, непосредственно примыкающей к стенке.

Описанная выше качественная картина деформации шара означает, что при изучении столкновения упругие свойства шара можно считать сосредоточенными вблизи точки контакта (в пружине на рис. 27.2). Так как масса этой деформируемой части мала по сравнению с массой всего шара, то ее деформацию можно считать квазистатической (как у пружины, вовсе лишенной массы), а инертные свойства шара можно рассматривать, считая, что вся масса шара сосредоточена в его центре. В отличие от упругого стержня, для которого нужно было считать, что упругие и инертные свойства равномерно распределены по всему объему, здесь мы можем с хорошей точностью рассматривать упругий шар как точечную массу, прикрепленную к невесомой пружине с переменной жесткостью.

Из такой модели сразу становится ясно, что длительность столкновения шара со стенкой зависит от скорости шара перед ударом. При малой скорости деформация мала и затрагивает только участок «пружины» с малой жесткостью. Период колебаний массивного шара на такой пружине велик, поэтому время столкновения будет большим. Чем больше эта скорость, тем более жесткие участки «пружины» вступают в работу и тем меньшим оказывается время столкновения.

При столкновении шара со стенкой, как мы видим, длительность определяется совсем другими процессами, чем при столкновении стержня со стенкой. Там эта длительность определялась временем прохождения звука вдоль стержня, а здесь она связана с периодом колебаний шара на пружине переменной жесткости, причем эта жесткость мала при небольших скоростях. Поэтому длительность столкновения для шара значительно больше, чем для стержня из того же материала и имеющего длину, равную диаметру шара.

Во всех рассуждениях мы для простоты считали стену недеформируемой. Нетрудно сообразить, что все качественные выводы остаются справедливыми и тогда, когда стена сделана из упругого материала, свойства которого близки к свойствам материала шара. Различие в форме поверхности шара и стенки вблизи точки соприкосновения приводит к тому, что при не слишком большой скорости шара деформируется только шар, а поверхность стенки практически остается плоской. Деформация стенки будет существенна только в том случае, когда жесткость материала стенки (модуль Юнга) значительно меньше жесткости шара.

Теперь мы можем вернуться к задаче 23 о столкновении шара с клином, лежащим на горизонтальной поверхности, и обсудить вопрос о том, какому из рассмотренных там решений следует отдать предпочтение. Ясно, что единого ответа быть не может: все зависит от таких свойств участвующих в столкновении тел, о которых ничего не говорится в условии задачи.

Если длительность столкновения шара с клином значительно превышает время распространения волны упругой деформации по клину, то можно считать, что действие шара на клин будет квазистатическим, как если бы на наклонную грань клина действовала постоянная сила. В этом случае правильным является представление об одном ударе — ударе шара с системой, состоящей из клина и поверхности,

на которой он лежит. Следовательно, справедливо первое решение задачи. Так будет, например, тогда, когда жесткость материала клина больше или того же порядка, что и материала шара, а их размеры сравнимы между собой.

Если же жесткость материала клина значительно меньше, чем шара, то может оказаться, что время распространения волны деформации по клину будет больше, чем длительность соударения шара с клином. В этом случае ближе к действительности будет представление о последовательности двух соударений — шара с клином и клина с подставкой. Однако следует помнить, что в этом случае часть первоначальной кинетической энергии шара может превратиться в энергию упругих колебаний клина. ▲

28. Футбольный мяч. Сколько времени длится столкновение футбольного мяча со стенкой? С какой силой мяч давит на стенку?

△ Будем для простоты считать, что мяч летит перпендикулярно поверхности стенки. При ударе о стенку мяч деформируется. При не слишком большой скорости мяча деформации невелики и можно считать, что не касающаяся стенки часть поверхности мяча по-прежнему сферическая, а место соприкосновения становится плоским, как показано на рис. 28.1.

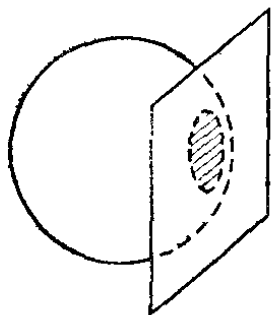


Рис. 28.1. Деформация мяча при столкновении со стенкой

Какие силы действуют на мяч во время удара? До удара действовавшие на мяч силы атмосферного давления уравнивали друг друга. В процессе удара это уже не так. Действительно, сначала мяч касается стенки в одной точке; затем от этой точки область контакта расширяется в круг.

При этом воздух из зазора вытесняется наружу. В результате появляется нескомпенсированная сила давления атмосферного воздуха, направленная к стенке и равная произведению атмосферного давления p_0 на площадь области контакта S (рис. 28.2).

Давление воздуха p внутри мяча во время удара можно считать во всех точках одинаковым, как и при статической деформации. Поэтому воздух внутри мяча давит на часть оболочки, соприкасающуюся со стенкой, с силой, равной pS . С такой же по модулю, но противоположно направленной силой действует на эту часть оболочки мяча и стенка.

Итак, полная сила, действующая на мяч при ударе, направлена от стенки и равна $(p-p_0)S$. Площадь области контакта мяча со стенкой S легко найти с помощью рис. 28.3. Обозначим радиус мяча через R , радиус круга — области контакта со стенкой — через r , а деформацию мяча через x . Тогда по теореме Пифагора

$$r = \sqrt{R^2 - (R-x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2}. \quad (1)$$

Поэтому площадь области контакта

$$S = \pi r^2 = 2\pi R x (1 - x/2R). \quad (2)$$

Нужно ли учитывать изменение давления воздуха в мяче при его деформации? Относительное уменьшение объема мяча $\Delta V/V$ оказывается величиной порядка $(x/R)^2$. Поэтому если мы, считая деформацию мяча x малой по сравнению с его радиусом

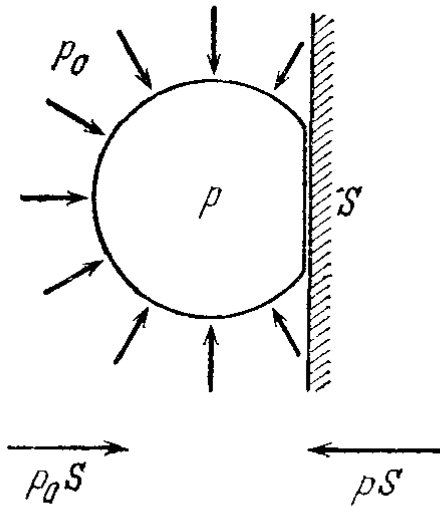


Рис. 28.2. К нахождению сил, действующих на мяч при ударе

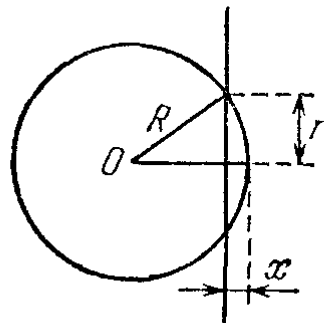


Рис. 28.3. К определению размера области контакта мяча со стенкой

R ($x \ll R$), будем при вычислении площади S в (2) отбрасывать малое по сравнению с единицей слагаемое $x/2R$, то нужно тем более пренебречь изменением давления, пропорциональным $(x/R)^2$.

Таким образом, полная сила F , действующая на мяч во время удара, пропорциональна деформации мяча x :

$$F = (p-p_0)S = 2\pi R (p-p_0)x = kx. \quad (3)$$

Движение центра мяча при действии такой силы должно представлять собой гармоническое колебание с частотой, определяемой соотношением

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2\pi R (p-p_0)}{m}, \quad (4)$$

где m — масса мяча. Так как деформация мяча при ударе

о стенку может представлять собой только сжатие, которое не сменяется его растяжением (так как мяч просто отскакивает от стенки), то это «колебание» продолжается только в течение половины периода T . Таким образом, длительность удара мяча о стенку

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p-p_0)}}. \quad (5)$$

Время столкновения футбольного мяча со стенкой тем меньше, чем больше давление воздуха p внутри мяча, но не зависит от скорости мяча перед ударом v_0 . Максимальная сила, с которой мяч действует на стенку, разумеется, зависит от скорости мяча. В момент наибольшей деформации мяча вся его кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию деформации:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad (6)$$

Отсюда можно найти максимальную деформацию мяча x_0 :

$$x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi R(p-p_0)}} v_0, \quad (7)$$

где k подставлено из соотношения (4).

Приведем числовые оценки. Пусть масса мяча $m \approx 0,4$ кг, радиус $R \approx 0,15$ м, а давление воздуха в мяче превышает атмосферное на одну атмосферу: $p - p_0 = 1$ атм $= 1,013 \cdot 10^5$ Па. Подставляя эти данные в формулу (5), получаем $\tau \approx 6,4 \cdot 10^{-3}$ с. Длительность столкновения оказалась менее сотой доли секунды. Чтобы оценить деформацию мяча при ударе, нужно задать еще его скорость перед ударом. Считая ее равной примерно 15 м/с, с помощью формулы (7) находим, что максимальная деформация x_0 составляет примерно 3 см. Максимальное значение силы, действующей на стенку в момент остановки мяча, равно, в соответствии с формулой (3), 2800 Н. ▲

29. Отражение от стенки. Под каким углом отскакивает футбольный мяч от стенки?

△ Задача, разумеется, тривиальная, если считать, что удар абсолютно упругий, а стенка и мяч идеально гладкие. Тогда трение между мячом и поверхностью стенки отсутствует и угол отражения β равен углу падения α (рис. 29.1).

Совсем иначе обстоит дело, если мяч и стенка шероховатые, так что пренебрегать трением уже нельзя. Однако и в этом случае легко найти угол отражения, если известен коэффициент трения μ мяча о поверхность стенки.

Будем рассуждать следующим образом. Разложим вектор скорости поступательного движения мяча до удара $\mathbf{v}$ на две составляющие: $\mathbf{v}_\perp$, направленную перпендикулярно поверхности стенки, и $\mathbf{v}_\parallel$, направленную вдоль поверхности (рис. 29.2). Обозначим соответствующие скорости мяча после отскока через $\mathbf{v}'_\perp$ и $\mathbf{v}'_\parallel$. Перпендикулярная составляющая скорости мяча при ударе о стенку меняет свое направление на противоположное, оставаясь неизменной по модулю. Параллельная же составляющая скорости, вообще говоря, изменяется по модулю.

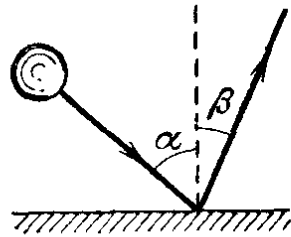


Рис. 29.1. Отскок мяча от стенки

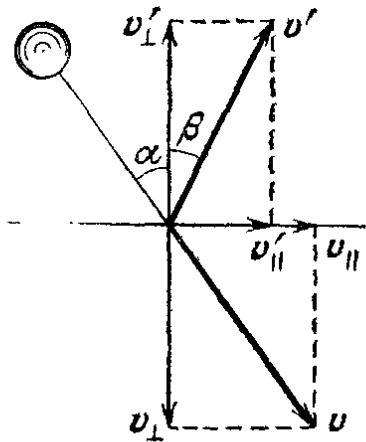


Рис. 29.2. Разложение на составляющие скорости мяча до и после удара

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим силы, действующие на мяч со стороны стенки при ударе (рис. 29.3). Направленная по нормали к стенке сила $\mathbf{N}$ — это сила упругости, возникающая при деформации мяча. Деформацию хорошо накачанного мяча можно считать упругой, после удара мяч восстанавливает свою форму. Поэтому энергия упругой деформации мяча после удара снова перейдет в кинетическую энергию.

Другими словами, часть кинетической энергии мяча, связанная с его движением по нормали к стенке, остается неизменной.

Изменение составляющей скорости, параллельной поверхности, происходит под действием силы трения. Эта сила направлена в сторону, противоположную скорости точек поверхности мяча в месте соприкосновения со стенкой. Если мяч до удара не вращался, то скорости этих точек равны

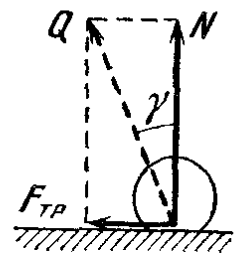


Рис. 29.3. Силы, действующие на мяч во время удара

$v_{\parallel}$, и действие силы трения приводит к уменьшению модуля $v_{\parallel}$. Это значит, что угол отражения β меньше угла падения α . Именно этот случай и изображен на рис. 29.1 и 29.2. Сила трения может и увеличивать значение $v_{\parallel}$, если до удара о стенку мяч вращался в направлении, указанном на рис. 29.4. При достаточно быстром вращении мяча ($\omega R >$

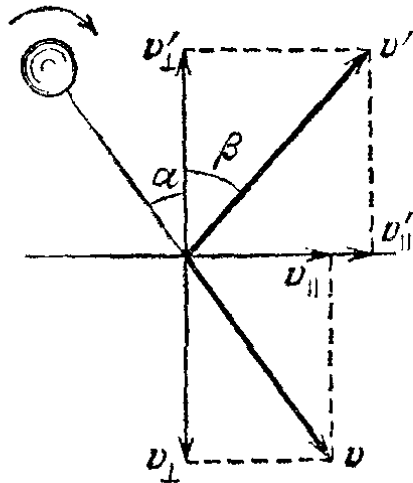


Рис. 29.4. Скорости мяча до и после удара при вращении налетающего мяча по часовой стрелке

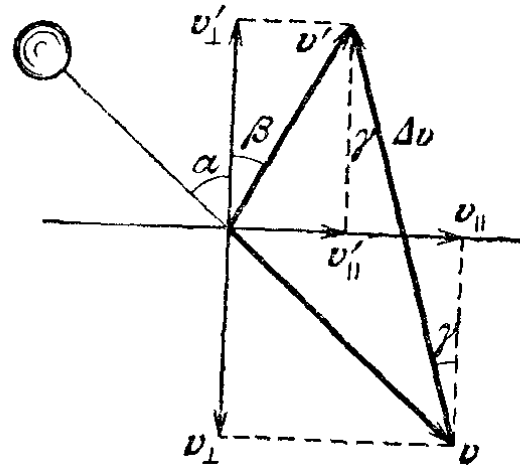


Рис. 29.5. К вычислению угла отражения β

$>v_{\parallel}$) касающиеся стенки точки мяча имеют скорости, направленные влево, сила трения направлена вправо и значение $v_{\parallel}$ возрастает. В этом случае угол отражения больше угла падения.

Рассмотрим подробно случай, когда мяч до удара не вращается. Будем также считать, что скорости точек мяча, касающихся стенки, не обращаются в нуль: в течение удара проскальзывание не прекращается. Сила N (рис. 29.3) возникает в момент соприкосновения мяча со стенкой, затем растет, достигая наибольшего значения в момент максимальной деформации мяча, а затем убывает до нуля. Сила трения скольжения $F_{\text{тр}}$ в течение удара также не остается постоянной. В любой момент времени модули сил $F_{\text{тр}}$ и N связаны законом Кулона — Амонтона:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (1)$$

Поэтому в течение всего удара полная сила Q , с которой поверхность стенки действует на мяч, изменяется по модулю, но остается неизменной по направлению, образуя угол γ с нормалью к стенке. Как видно из рис. 29.3, $\tan \gamma = \mu$. Это позволяет найти угол отражения мяча β .

На основании второго закона Ньютона изменение импульса мяча при ударе о стенку $\Delta \mathbf{p}$ совпадает по направлению с силой $\mathbf{Q}$. С помощью рис. 29.2 построим вектор изменения импульса $\Delta \mathbf{p} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ (рис. 29.5). Этот вектор, так же как и вектор $\mathbf{Q}$ на рис. 29.3, образует угол γ с нормалью к стенке. Непосредственно из рис. 29.5 видно, что

$$v'_{\parallel} = v_{\parallel} - 2v_{\perp} \operatorname{tg} \gamma. \quad (2)$$

Деля обе части этого равенства на $v_{\perp}$ и учитывая, что $v_{\parallel}/v_{\perp} = \operatorname{tg} \alpha$, $v'_{\parallel}/v'_{\perp} = \operatorname{tg} \beta$, а $\operatorname{tg} \gamma = \mu$, получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2\mu. \quad (3)$$

Из полученной формулы видно, что при малых углах падения, когда $\operatorname{tg} \alpha < 2\mu$, результат теряет смысл. С чем это связано? Формула (3) выведена в предположении, что проскальзывание мяча не прекращалось в течение всего времени его контакта со стенкой. Однако при малых углах падения проскальзывание мяча может прекратиться раньше, чем он отделится от стенки. Это связано с тем, что сила трения скольжения, направленная противоположно $\mathbf{v}_{\parallel}$, не только тормозит поступательное движение мяча, но и вызывает его вращение по часовой стрелке, так как точка приложения силы трения не совпадает с центром мяча. Проскальзывание прекращается в тот момент, когда связанная с вращением скорость нижней точки мяча сравняется по модулю с параллельной поверхности составляющей скорости центра мяча.

Случай, когда в процессе столкновения со стенкой проскальзывание мяча прекращается, более сложен для исследования, так как требует привлечения уравнения, описывающего вращательное движение. При этом оказывается, что ответ, даваемый формулой (3), становится неприменимым даже при угле падения α , тангенс которого несколько больше 2μ . Точный расчет дает для предельного угла падения $\operatorname{tg} \alpha = 5\mu$.

Отскочивший от шероховатой стенки мяч обязательно будет вращаться, даже если до удара он не вращался. Кинетическая энергия этого вращения возникает за счет уменьшения кинетической энергии поступательного движения. Некоторая часть механической энергии мяча при ударе переходит в тепло.

Нетрудно сообразить, что даваемое формулой (3) значение угла отражения β справедливо и в том случае, когда

до удара мяч вращался против часовой стрелки. Не представляет труда найти угол отражения и тогда, когда до удара мяч вращался по часовой стрелке. Если это вращение достаточно быстрое, так что проскальзывание мяча не прекращается в течение удара, то, рассуждая так же, как и при получении выражения (3), находим

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha + 2\mu. \quad (4)$$

В этом случае кинетическая энергия поступательного движения мяча в результате удара о стенку увеличивается. Это увеличение, как и выделение тепла во время удара, происходит за счет кинетической энергии вращения. ▲